Доказательство. Пусть $V(q^*)=0$ для определенности, $\mathcal{D}$ — произвольная область, содержащая q^*. Существует ее подобласть $\mathcal{D}_0$ с границей $\partial\mathcal{D}_0$ такая, что $\eta=\min\limits_{\partial\mathcal{D}_0} V>0$ (положительности η можно добиться, уменьшая $\mathcal{D}_0$, так как, по условию, q^* — строгий минимум V). Функция V непрерывна, так что существует подобласть $\mathcal{D}'\subset\mathcal{D}_0$ такая, что для всех $q_0\in\mathcal{D}'$ выполнено неравенство $0\leqslant V(q_0)<\eta/2$. Положим $\varepsilon=\sqrt{\eta/m}$. Пусть $q_0\in\in\mathcal{D}'$, $|v_0|<\varepsilon$. Тогда

$$h=mv^2/2+V(q_0)<m\varepsilon^2/2+\eta/2=\eta,$$

т. е. движение происходит с энергией $h<\eta$; следовательно, выйти из $\mathcal{D}_0\subset\mathcal{D}$ оно не может.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА. Можно доказать обратное утверждение (о неустойчивости), предполагая невырожденность критической точки q^*, не являющейся минимумом. Невырожденность означает, что определитель матрицы Гесса

$$\left.\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_2} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\end{vmatrix}\right|_{q^*}\neq 0.$$

Это ситуация общего положения. Пусть $q^*=(0,\ 0)$ для простоты. Уравнения первого приближения будут (ср. с выводом (4.10)):

$$A\begin{pmatrix}\ddot q_1\\ \ddot q_2\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}=\mathbf{0}, \tag{7.2}$$

$$A=(a_{ij})=\left.\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\right|_{(0,0)},\quad B=(b_{ij})=\left.\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_2}\\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1\partial q_2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\end{pmatrix}\right|_{(0,0)}.$$

Уравнения (2) имеют лагранжев вид с лагранжианом

$$L_0=\frac{1}{2}\Sigma a_{ij}\dot q_i\dot q_j-\frac{1}{2}\Sigma b_{ij}q_iq_j. \tag{7.3}$$

Матрица A есть матрица коэффициентов сужения евклидовой метрики на касательную плоскость $T_0(\mathfrak{M})$, вычисленная в репере $\dfrac{\partial r}{\partial q_1}$, $\dfrac{\partial r}{\partial q_2}$. Поэтому функцию L_0 можно рассматривать как лагранжиан некоторого фиктивного движения в касательной плоскости, фиктивного, но в существенных чертах сходного с действительным движением. Воспользуемся теперь нашим правом заменять переменные в лагранжиане (см. конец § 5).

Теорема. *Существует такая линейная замена:*

$$\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\dot q_1\\ \dot q_2\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{pmatrix},$$