что

$$L_0 = \frac{1}{2}\Sigma \dot{x}^2_i - \frac{1}{2}\Sigma\lambda_i x^2_i, \tag{7.4}$$

и уравнения (2) приводятся к виду

$$\ddot{x}_i + \lambda_i x_i = 0, \tag{7.5}$$

где переменные разделены.

Для доказательства надо взять матрицу C линейной замены:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

приводящей квадратичные формы (первая из них положительно определена) $\Sigma a_{ij}q_iq_j$, $\Sigma b_{ij}q_iq_j$ к виду Σx_i^2; $\Sigma\lambda_i x_i^2$.

Докажем, как строится искомая замена в общем случае, когда эти формы не пропорциональны. На плоскости $\mathbf{R}^2(q_1, q_2)$ рассмотрим эллипс

$$Aq\cdot q = \Sigma a_{ij}q_iq_j = 1, \tag{7.6}$$

и переменную кривую второго порядка:

$$Bq\cdot q = \Sigma b_{ij}q_iq_j = C, \tag{7.7}$$

которая ввиду невырожденности матрицы есть, вообще говоря, эллипс или гипербола. Ровно при двух значениях $C = C_1$, C_2 мы будем иметь касание кривой (7) с эллипсом (6) (см. рис. 48, где изображен случай, когда (7) — эллипс; вариант гиперболы изобразить самостоятельно). Отметим на плоскости точки касания и направим в две из них линейно независимые векторы $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$. Тогда, поскольку формальные градиенты левых частей (6) и (7) в точках касания коллинеарны,

$$B\mathfrak{f}_i = \lambda_i A\mathfrak{f}_i,\quad A\mathfrak{f}_i\cdot\mathfrak{f}_i = 1. \tag{7.8}$$

Отсюда

$$\det|B - \lambda_i A| = 0,$$

так что λ_i являются корнями одного квадратного уравнения. С другой стороны,

$$C_i = B\mathfrak{f}_i\cdot\mathfrak{f}_i = \lambda_i A\mathfrak{f}_i\cdot\mathfrak{f}_i = \lambda_i,$$

так что $\lambda_1 = C_1$, $\lambda_2 = C_2$. Второе из равенств (8) указывает, что модули $\mathfrak{f}_i$ равны единице в имеющейся евклидовой метрике. Кроме того, эти векторы ортогональны, так как

$$\lambda_1 A\mathfrak{f}_1\cdot\mathfrak{f}_2 = B\mathfrak{f}_1\cdot\mathfrak{f}_2 = B\mathfrak{f}_2\cdot\mathfrak{f}_1 = \lambda_2 A\mathfrak{f}_2\cdot\mathfrak{f}_1,$$

откуда $A\mathfrak{f}_1\cdot\mathfrak{f}_2 = 0$. Осталось положить

$$q = x_1\mathfrak{f}_1 + x_2\mathfrak{f}_2,$$

и тогда

$$Aq\cdot q = x_1^2 + x_2^2,\quad Bq\cdot q = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2.$$

З а д а ч а 12. Систему уравнений (5) решить в зависимости от знаков λ_i (см. конец § 4); установить наличие квадратичных интегралов $\Phi_i = \dot{x}_i^2/2 + \lambda_i x_i^2/2 = C_i$; по аналогии с бигармоническим осциллятором изобразить различные типы траекторий.