Заключение. Если среди λ_i есть отрицательные, то $\tilde{V}$ не имеет минимума в точке q^* (будет седло или максимум), а решения линеаризованной системы, вообще говоря, будут экспоненциально уходить (см. § 4), хотя бы по одной из координат x_i. По соответствующим теоремам из теории дифференциальных уравнений это гарантирует неустойчивость решений точной системы и доказывает обращение теоремы Лагранжа—Дирихле в случае невырожденной критической точки.

§ 8. ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \tag{8.1}$$

порожденные функцией

$$L=\frac{1}{2}(E\dot{q}_1^2+2F\dot{q}_1\dot{q}_2+G\dot{q}_2^2)-V. \tag{8.2}$$

Определение. В системе координат (q_1q_2) (на $\mathfrak{M}$) координата q_2 называется *игнорируемой (циклической)*, если

$$\frac{\partial L}{\partial q_2}=0. \tag{8.3}$$

Тогда из (1) вытекает наличие первого интеграла этих уравнений:

$$J=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}=c, \tag{8.4}$$

который называется *циклическим*, или *кинестеническим*. Условие (3) для лагранжиана вида (2) эквивалентно равенствам

$$\frac{\partial E}{\partial q_2}=\frac{\partial F}{\partial q_2}=\frac{\partial G}{\partial q_2}=\frac{\partial V}{\partial q_2}=0,$$

а интеграл

$$J=F\dot{q}_1+G\dot{q}_2 \tag{8.5}$$

получается *линейным по скоростям* $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$.

ОТОБРАЖЕНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ ЛАГРАНЖИАН. Рассмотрим семейство отображений многообразия $\mathfrak{M}$ в себя, при которых

$$(q_1,\ q_2)\to(q_1,\ q_2+s), \tag{8.6}$$

т. е. точка P с координатами $(q_1,\ q_2)$ переходит в точку P^s с координатами $(q_1,\ q_2+s)$ (рис. 46). Если точка P перемещается по закону $P=P(t)$, то ее скорость в рассматриваемой системе координат имеет компоненты $(\dot{q}_1,\ \dot{q}_2)$. Те же компоненты будут, очевидно, и у скорости точки $P^s(t)$. Поскольку L не зависит от q_2, можно написать

$$L\left(\frac{dq_1}{dt};\ \frac{d}{dt}(q_2+s),\ q_1,\ q_2+s,\ t\right)=L\left(\frac{dq_1}{dt},\ \frac{dq_2}{dt},\ q_1,\ q_2,\ t\right),$$