или условно

$$L(\dot{P}^s, P^s, t) = L(\dot{P}, P, t).$$

Это и означает сохраняемость лагранжиана. Заметим, что факт сохраняемости L при преобразованиях $P \to P^s$ не обязательно устанавливать в системе координат, из которых одна — игнорируемая. Лемма об эквивалентности из § 7 позволяет записывать лагранжиан в любой системе координат; при движении по поверхности достаточно проверить, что $|\dot{P}^s|^2 = |\dot{P}|^2$, $V(P^s) = V(P)$, так как лагранжиан дается инвариантной формулой $L = T - V$.

Под эту теорию подпадают, например, системы, рассмотренные в задачах 8 и 9 и вообще интегралы типа А и Б из § 5 и 1. С каждым из них можно ассоциировать некоторое семейство отображений (для типа А это группа сдвигов вдоль оси x, для типа Б — группа поворотов вокруг оси z), при которых сохраняется поверхность (и, следовательно, индуцированная метрика) и потенциал. Например, для того чтобы поверхность $\mathfrak{M} = \{f(x, y, z) = 0\}$ сохранялась группой поворотов (на угол s вокруг оси z):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos s - y\sin s \\ x\sin s + y\cos s \\ z \end{pmatrix},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x\cos s - y\sin s,\ x\sin s + y\cos s,\ z) \equiv f(x, y, z) = 0;$$

дифференцируя по s, получаем (достаточно положить $s = 0$)

$$\frac{\partial f}{\partial x} y - \frac{\partial f}{\partial y} x \equiv 0.$$

Это и есть одно из условий существования интеграла момента.

Замечание об интегрируемости. Наличие двух интегралов движения (интеграла энергии и циклического) в системе с двумя же степенями свободы позволяет решить уравнения движений и проанализировать их качественно. Соответствующие общие теоремы будут даны позднее, а пока приведем пример.

СФЕРИЧЕСКИЙ МАЯТНИК. Точка движется по сфере в поле тяжести: $\mathfrak{M} = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, $\mathbf{F} = -mg\mathbf{e}_z$. В сферических координатах θ и ψ (рис. 13)

$$x = r\sin\theta\cos\psi,\quad y = r\sin\theta\sin\psi,\quad z = r\cos\theta, \tag{8.7}$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz = T - V =$$

$$= \frac{mr^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\psi}^2) - mgr\cos\theta.$$

Интеграл энергии $H = T + V = mgrh_1$. В выражении L переменная ψ отсутствует. Отсюда

$$J = mr^2\sin^2\theta\dot{\psi} = mr^2c_1$$

циклический интеграл. Видно, что при $c_1 \neq 0$ функция $\psi(t)$ моно-