тонна. Найдем область возможности движения $\mathfrak{M}_c^h$, для этого исключим $\dot\psi$ из интегралов J и H:

$$\frac{mr^2}{2}\left(\dot\theta^2+\frac{c^2_1}{\sin^2\theta}\right)+mgr\cos\theta=mgrh_1, \tag{8.8}$$

$$\mathfrak{M}^h_c=\left\{\frac{mr^2}{2}\frac{c^2_1}{\sin^2\theta}+mgr\cos\theta\leqslant mgrh_1\right\}.$$

В левой части неравенства стоит так называемый приведенный потенциал, в правой — энергия. Нарисуем график приведенного потенциала V_c (рис. 60). Неравенство $V_c\leqslant h$ высекает отрезок по θ (который может выродиться в точку либо пустое множество), а угол ψ — любой. Из (8) вытекает, что

$$\frac{d\theta}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2g}{r}(h_1-\cos\theta)-\frac{c^2_1}{\sin^2\theta}}.$$

Подкоренное выражение неотрицательно в точности на $\mathfrak{M}_c^h$. При движении φ растет, а θ колеблется в предписанных заданными c и h пределах. Траектория, вообще говоря, не замкнется. Ситуация здесь очень напоминает ту, которую мы наблюдали в случае центрального поля сил.

Задача 13. Будем задавать траектории движения в виде $\theta(\varphi)$.

1) Доказать, что

$$\frac{d\theta}{d\varphi}=\pm\sqrt{\frac{2g}{rc^2_1}(h_1-\cos\theta)\sin^4\theta-\sin^2\theta}.$$

2) Из уравнения Лагранжа и интегралов получить уравнение 2-го порядка относительно $\theta(\varphi)$ и показать, что оно эквивалентно уравнению вида

$$\frac{d}{d\theta}\frac{\partial F}{\partial\theta'}-\frac{\partial F}{\partial\theta}=0,$$

где

$$F=\frac{\theta'^2}{2\sin^4\theta}-\frac{mr^2}{c^2}V_c(\theta).$$

3) Сделать замену переменных $\chi=\chi(\theta)$, которая приводит к виду $F=\frac{1}{2}\chi'^2+\ldots$.

4) Сопоставить эти результаты с формулой (6) и леммой 2 из § 2.

5) Доказать, что траектории не имеют точек перегиба.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ВИД ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА. Мы знаем, что любой линейный интеграл на плоскости имеет один из двух типов А или Б. На поверхности, вообще говоря, это неверно.

Наблюдение. Интегралы типов А и Б на поверхности суть скалярные произведения импульса $m\dot{\mathbf{v}}$ с полем скоростей u соответствующей однопараметрической группы. Например, тип Б:

$$\widehat{J}_z=m(x\dot y-y\dot x)=(\mathbf{e}_z,\ m[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}])=(m\dot{\mathbf{r}},\ \underbrace{[\mathbf{e}_z\times\mathbf{r}]}_{\mathbf{u}}).$$