$$\mathbf{u}=[\mathbf{e}_z\times\mathbf{r}]=-y\mathbf{e}_x+x\mathbf{e}_y=\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}.$$

С другой стороны, поле скоростей группы поворотов

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\cos s & -\sin s & 0\\ \sin s & \cos s & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}=\mathbf{u}.$$

Общее утверждение. Линейный интеграл (4)

$$J=\left(m\dot{\mathbf{r}},\ \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}\right),\tag{8.9}$$

причем поле $\mathbf{u}=\dfrac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}$ есть поле скоростей при действии (локальной, вообще говоря) группы $\Pi^s: (q_1,\ q_2)\to(q_1,\ q_2+s)$. В самом деле,

$$\frac{d\mathbf{r}^*}{ds}(q_1,\ q_2+s)=\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}=\mathbf{u},$$

а с учетом соглашения в конце § 5

$$(m\mathbf{v},\ \mathbf{u})=m\left(\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}\dot{q}_2,\ \frac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}\right)=(F\dot{q}_1+G\dot{q}_2)=J,$$

что и требовалось.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИГНОРИРУЕМОЙ КООРДИНАТЫ. Изложенная выше концепция циклических интегралов и доказываемая ниже теорема без труда обобщаются на многомерный случай, т. е. на произвольные механические системы, которые будут рассматриваться гораздо позднее.

Теорема. *Пусть имеется интеграл движения $J\neq 0$, линейный по скоростям в системе координат $(\xi_1,\ \xi_2)$ на $\mathfrak{M}$. Тогда на $\mathfrak{M}$ существует система координат $(q_1,\ q_2)$, в которой q_2 — циклическая и $J=\partial L/\partial\dot{q}_2$.*

Доказательство. Пусть в «плохих» координатах ξ_1, ξ_2

$$J=(a_1\dot{\xi}_1+a_2\dot{\xi}_2),\ a_1^2+a_2^2\neq 0,$$

$$L=\frac{1}{2}(E\dot{\xi}_1^2+2F\dot{\xi}_1\dot{\xi}_2+G\dot{\xi}_2^2)-V.$$

Положим

$$\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$J=\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}_1}\nu_1+\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}_2}\nu_2.\tag{8.10}$$

Лемма 1. Если в новой системе координат $\mathbf{u}=\dfrac{\partial \mathbf{r}^*}{\partial q_2}$, то