ент есть векторное поле $\mathbf{w} = \operatorname{Grad}\Phi$ с компонентами

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Phi}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial q_2} \end{pmatrix},$$

причем

$$|\operatorname{Grad}\Phi|^2 = \frac{1}{EG - F^2}\left(G\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\right)^2 - 2F\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2} + E\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\right)^2\right).$$

Эту функцию обозначим через Φ'. Далее, *внутренней дивергенцией* векторного поля $\mathbf{w}$ называется функция

$$\operatorname{Div}\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\sqrt{g}\,w_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\sqrt{g}\,w_2)\right],$$

где $g = EG - F^2$. В частности, введем функцию $\Phi'' = \operatorname{Div}\operatorname{Grad}\Phi$ — оператор Лапласа от Φ (обычное обозначение —$\Delta(\Phi)$).

Замечание: $\Phi'' \neq (\Phi')'$.

2. Гауссова кривизна многообразия:

$$\Gamma = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

выражается через E, F, G и их производные.

3. Будем говорить, что функции Φ, Ψ *зависимы* ($d\Phi \| d\Psi$), если

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\Phi}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial q_1} & \dfrac{\partial\Psi}{\partial q_2} \end{vmatrix} = 0,$$

что равносильно $\operatorname{Grad}\Phi \| \operatorname{Grad}\Psi$. Если это свойство выполняется в некоторой области, то по теореме о неявной функции локально $\Phi(q) = f(\Psi(q))$, где $f = f(\chi)$ — некоторая функция одного переменного. Обратное очевидно.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА. Нижеследующие построения являются специфически двумерными. Будет показано, что по коэффициентам E, F, G, V лагранжиана можно определить, есть ли у задачи линейный интеграл. Предполагается, что все рассматриваемые функции — аналитические (если аналитическая функция не равна нулю в одной точке, то ни в какой области она не равна тождественно нулю).

Необходимое условие: функции V, V', V'', Γ, Γ', Γ'' зависимы. (В самом деле, пусть q_1 — циклическая координата в системе (q_1, q_2). Тогда V, E, F, G и их производные суть функции только от q_1.) Это условие можно проверить в любой системе координат, поскольку функции V и Γ модуль градиента, оператор Лапласа и свойство зависимости не зависят от выбора системы координат.