Если обе функции Г, V постоянны, то мы имеем движение по инерции либо по сфере, либо по плоскости, либо по плоскости Лобачевского (локально). Такое движение всегда обладает линейным интегралом.

Теорема Бьянки — Синга. *Пусть* $d\Gamma \| dV$, *и* Φ — *та из функций* Γ *и* V, *которая не постоянна. Тогда если*

$$d\Phi \mid d\Phi', \ d\Phi \mid d\Phi'',$$

то существует система координат (x_1, x_2), *в которой*

$$L = \frac{1}{2}\left(A(x_1)\dot{x}_1^2 + B(x_1)\dot{x}_2^2\right) + V(x_1)$$

(таким образом, необходимое условие также и достаточно).

Доказательство. Идея состоит в том, что базисные векторы системы координат направить по вектору $\mathbf{w} = \operatorname{Grad}\Phi$ и ортогонально ему. Начнем с того, что положим

$$x_1 = \Phi(q_1, q_2).$$

Заметим, что вектор с компонентами $-\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}, \frac{\partial\Phi}{\partial q_1}$ ортогонален $\mathbf{w} = \operatorname{Grad}\Phi$. Если он коллинеарен $\operatorname{Grad}\Psi$, то

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\Psi}{\partial q_1} \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial q_2} \end{pmatrix} \Big\| \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial\Phi}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial q_1} \end{pmatrix} \Big\| \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}.$$

Итак, должно быть

$$d\Psi = \mu\sqrt{g}\,(-w_2 dq_1 + w_1 dq_2),$$

где μ — неизвестный пока интегрирующий множитель. Коэффициент $\sqrt{g}$ добавлен в это равенство для удобства. Условие того, что правая часть есть полный дифференциал, приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(-\mu\sqrt{g}w_2) \equiv \frac{\partial}{\partial q_1}(\mu\sqrt{g}\,w_1),$$

или $\operatorname{div}(\mu\mathbf{w}) \equiv 0$, или, более подробно,

$$\frac{\partial\mu}{\partial q_1} w_1 + \frac{\partial\mu}{\partial q_2} w_2 + \frac{\mu}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(\sqrt{g}w_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\sqrt{g}\,w_2)\right) = 0.$$

Если мы хотим, чтобы было $\mu = \mu(x_1)$, то должно быть

$$\frac{d\mu}{dx_1}\left(w_1\frac{\partial\Phi}{\partial q_1} + w_2\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\mu}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}(\sqrt{g}\,w_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\sqrt{g}\,w_2)\right) = 0,$$

или

$$\frac{d\mu}{dx_1}\Phi' + \mu\Phi'' = 0.$$

Но в предположениях теоремы $\Phi' = \Phi'(x_1)$, $\Phi'' = \Phi''(x_1)$, так что

$$\mu = e^{\left[-\int \frac{\Phi''(x_1)}{\Phi'(x_1)}dx_1\right]} = \mu(x_1).$$