Следовательно, коэффициент μ существует и зависим с Ф. Положим $x_2 = \Psi(q_1, q_2)$. Легко увидеть, что

$$dx_1^2 + \frac{dx^2_i}{\mu^2} = \Phi' (Edq^2_1 + 2Fdq_1dq_2 + Gdq^2_2),$$

так что в новых координатах

$$L = \frac{1}{\Phi'(x_1)} \left(\dot{x}_1^2 + \frac{\dot{x}^2_2}{\mu^2(x_1)}\right) + V(x_1).$$

Теорема доказана.

§ 9. КВАДРАТИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Начнем с движения по плоскости. Закон Ньютона

$$m\ddot{x} = X(x, y), \quad m\ddot{y} = Y(x, y).$$

Пусть налицо квадратичный интеграл движения

$$\Phi = \frac{m}{2} (P\dot{x}^2 + 2Q\dot{x}\dot{y} + R\dot{y}^2) + W(x, y).$$

Тогда его полная производная

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial P}{\partial y}\dot{y}\right)\dot{x}^2 + 2\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\dot{y}\right)\dot{x}\dot{y} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial R}{\partial y}\dot{y}\right)\dot{y}^2\right] + P\dot{x}X + Q(\dot{x}Y + \dot{y}X) + R\dot{y}Y +$$
$$+ \frac{\partial W}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial W}{\partial y}\dot{y} = 0.$$

Приведем подобные члены: получается линейная и кубическая формы по $\dot{x}$, $\dot{y}$, коэффициенты которых должны быть равны нулю. Отсюда, во-первых,

$$PX + QY = -\frac{\partial W}{\partial x},$$

$$QX + RY = -\frac{\partial W}{\partial y},$$

т. е. потенциально поле

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ Q & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Во-вторых,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial R}{\partial y} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y} + 2\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial R}{\partial x} + 2\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{9.1}$$