Теорема 1. *Пусть J — функция, которая по теореме из § 1 может быть линейным интегралом в плоскости, т. е.*

$$J(\mathbf{v}) = m(a\dot{x} + b\dot{y}) \tag{9.2А}$$

или

$$J(\mathbf{v}) = m((x-a)\dot{y} - (y-b)\dot{x}). \tag{9.2Б}$$

Квадратичная часть рассматриваемого интеграла имеет вид

$$\varkappa(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \lambda J_1(\mathbf{v}) J_2(\mathbf{v}),$$

где $\varkappa$, λ — постоянные, а J_1, J_2 — две функции вида (2А) *или* (2Б), так что $J_1 J_2$ может быть трех качественно различных типов.

Доказательство. Дифференцируя уравнения системы (1) по x, y, нетрудно показать, что общее решение ее имеет вид

$$P = cy^2 + 2ky + p,$$
$$Q = -cxy - kx - ly - q,$$
$$R = cx^2 + 2lx + r.$$

Если $c \neq 0$, то можно считать, что $c = 1$. Параллельным переносом координат можно добиться того, что $k = l = 0$. Теперь квадратичная часть Φ привелась к

$$\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + \frac{1}{2}(p\dot{x}^2 - 2q\dot{x}\dot{y} + r\dot{y}^2). \tag{9.3}$$

Поворотом осей добьемся того, что $q = 0$. Считая $p = r + a^2$, получим вместо (3)

$$\frac{1}{2} p(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2 - \frac{1}{2} a^2 \dot{y}^2 =$$
$$= \frac{1}{2} p(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}((x+a)\dot{y} - y\dot{x})((x-a)\dot{y} - y\dot{x}).$$

Это и требовалось.

Упражнение. Случай $c = 0$ разобрать самостоятельно.

ЛИУВИЛЛЕВЫ СИСТЕМЫ. Система двух уравнений Лагранжа называется *лиувиллевой*, если лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}(f_1(q_1) + f_2(q_2))(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{V_1(q_1) + V_2(q_2)}{f_1(q_1) + f_2(q_2)}.$$

Теорема 2. *Лиувиллева система имеет интеграл:*

$$\Phi = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)(f_2\dot{q}_1^2 - f_1\dot{q}_2^2) + \frac{f_2 V_1 - f_1 V_2}{f_1 + f_2} = c, \tag{9.4}$$

независимый с интегралом энергии H.

Доказательство. Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

напишем подробнее:

$$\frac{d}{dt}[(f_1 + f_2)\dot{q}_1] - \frac{1}{2} f'_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{V_1 + V_2}{(f_1 + f_2)^2} f'_1 + \frac{V'_1}{f_1 + f_2} = 0.$$