Умножим последнее равенство на f_1+f_2 и $\dot{q}_1$:

$$(f_1+f_2)\dot{q}_1 \frac{d}{dt}[(f_1+f_2)\dot{q}_1] - f'_1 K\dot{q}_1 + V'_1\dot{q}_1 = 0$$

или

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(f_1+f_2)^2\dot{q}^2_1 - f_1K + V_1\right] = 0.$$

Осталось заметить, что $\Phi = \frac{1}{2}(f_1+f_2)^2\dot{q}_1^2 - f_1K + V_1$. (Оперируя аналогично со вторым уравнением Лагранжа, получим

$$-\Phi = \frac{1}{2}(f_1+f_2)^2\dot{q}^2_2 - f_2K + V_2 = -c.)$$

Следствие. *Пусть c, h фиксированы. Тогда область возможности движения*

$$\mathfrak{M}^c_h = \{-f_1h+V_1 \leqslant c,\ -f_2h+V_2 \leqslant -c\}.$$

Замечание. Система с лагранжианом более общего вида:

$$L = \frac{1}{2}(f_1+f_2)(a_1\dot{q}_1^2 + a_2\dot{q}_2^2) - \frac{V_1+V_2}{f_1+f_2}$$

приводится к лиувиллевой при помощи замены координат:

$$x_1 = \int \sqrt{a_1}dq_1,\quad x_2 = \int \sqrt{a_2}dq_2.$$

В частности, это касается систем с линейным интегралом.

Пример 1. Бигармонический осциллятор:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2).$$

Пример 2. Движение в центральном поле сил:

$$L = \frac{mr^2}{2}\left(\frac{\dot{r}^2}{r^2} + \dot{\varphi}^2\right) - V(r).$$

Пример 3. Движение точки массы $m=1$ в поле с потенциалом:

$$V(x, y) = -\frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} + gy,$$

которое есть сумма гравитационного и однородного. Введем параболические координаты по формулам

$$x = uv,\quad y = \frac{1}{2}(v^2 - u^2);$$

тогда

$$\dot{x} = u\dot{v} + v\dot{u},\quad \dot{y} = v\dot{v} - u\dot{u},\quad x^2+y^2 = \frac{1}{4}(u^2+v^2)^2,$$

и лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}(u^2+v^2)(\dot{u}^2+\dot{v}^2) - \frac{\left(\mu - \frac{gv^4}{2}\right) + \left(\mu + \frac{gu^4}{2}\right)}{u^2+v^2}$$