имеет лиувиллев вид. Второй интеграл по формуле (4)

$$\Phi=\frac{1}{2}(u^2+v^2)(v^2\dot{u}^2-u^2\dot{v}^2)-\mu\frac{v^2-u^2}{v^2+u^2}-\frac{g}{2}u^2v^2=C.$$

С другой стороны, произведение импульса вдоль оси x на момент относительно точки 0 имеет вид

$$\dot{x}(x\dot{y}-\dot{x}y)=\frac{1}{2}(u\dot{v}-v\dot{u})\left[2uv(v\dot{v}-u\dot{u})-(v^2-u^2)\times\right.$$

$$\left.\times(u\dot{v}+v\dot{u})\right]=\frac{1}{2}(u\dot{v}+v\dot{u})(u^2+v^2)(u\dot{v}-\dot{u}v)=$$

$$=\frac{1}{2}(u^2+v^2)(u^2\dot{v}^2-v^2\dot{u}^2),$$

т. е. в согласии с теоремой 1 совпадает с квадратичной частью интеграла Ф с точностью до знака. Области возможности движения:

$$\mathfrak{M}_h^C=\left\{-hu^2+\frac{gu^4}{2}+\mu\leqslant C,\ -hv^2-\frac{gv^4}{2}+\mu\leqslant -C\right\}$$

суть криволинейные прямоугольники; они ограничены отрезками координатных линий $u=\text{const}$ и $v=\text{const}$, которые представляют собой параболы с фокусом в начале координат.

Пример 4. Движение точки в гравитационном поле двух неподвижных центров: пусть для простоты массы m_1 и m_2 находятся на оси OY в точках ± 1. Потенциал суммарной гравитационной силы, действующей на движущуюся точку единичной массы, равен

$$V=-\gamma\frac{m_1}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}-\gamma\frac{m_2}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}.$$

Введем на плоскости новые координаты $\xi\in[0,\pi]$, $\eta\in\mathbf{R}$:

$$x=\operatorname{sh}\eta\sin\xi,\quad y=\operatorname{ch}\eta\cos\xi.$$

В этих переменных лагранжиан принимает вид $(\gamma=1)$

$$L=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}^2\eta-\cos^2\xi)(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)+\frac{(m_1+m_2)\operatorname{ch}\eta-(m_1-m_2)\cos\xi}{\operatorname{ch}^2\eta-\cos^2\xi}.$$

Пришли к лиувиллевой системе.

Задача 15. Доказать, что квадратичная часть второго интеграла Ф с точностью до кинетической энергии равна произведению моментов количества движения относительно притягивающих центров.

Задача 16. Показать, что координатные линии $\eta=\text{const}$ и $\xi=\text{const}$ являются эллипсами и гиперболами с фокусами в притягивающих центрах. Указать несколько вариантов областей возможности движения $\mathfrak{M}$ (сначала положить $m_1=m_2$).

Задача 17. Найти положение равновесия и исследовать его в линейном приближении. Показать, что в случае равных масс