($m_1 = m_2$) возможно движение по оси OX с частотой малых колебаний $\sqrt{m_1 + m_2}$.

Пример 5. Движение по инерции на эллипсоиде

$$\mathfrak{M} = \{Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1\}$$

(задача Якоби о геодезических на эллипсоиде).

Сначала введем в пространстве эллиптические координаты, ассоциированные с нашим эллипсоидом. Для определенности пусть $A < B < C$. По определению q_1, q_2, q_3 суть корни уравнения

$$\frac{Ax^2}{1 - Aq} + \frac{By^2}{1 - Bq} + \frac{Cz^2}{1 - Cq} = 1. \tag{9.5}$$

Таким образом,

$$-\infty < q_3 < 1/C < q_2 < 1/B < q_1 < 1/A.$$

Обратные формулы имеют вид

$$x^2 = \frac{BC}{A} \frac{(1 - Aq_1)(1 - Aq_2)(1 - Aq_3)}{(B - A)(C - A)},$$

$$y^2 = \frac{CA}{B} \frac{(1 - Bq_1)(1 - Bq_2)(1 - Bq_3)}{(C - B)(A - B)},$$

$$z^2 = \frac{AB}{C} \frac{(1 - Cq_1)(1 - Cq_2)(1 - Cq_3)}{(A - C)(B - C)}.$$

Положив $q_3 = 0$, мы оказываемся на исходном эллипсоиде, где q_1, q_2 будут служить локальными координатами (независимыми внутри каждого октанта).

Задача 18. Показать, что в этих координатах лагранжиан движения по инерции равен

$$L = \frac{v^2}{2} = \frac{ABC}{8}(q_1 - q_2)\left(\frac{q_1 \dot{q}^2_1}{(1 - Aq_1)(1 - Bq_1)} - \frac{q_2 \dot{q}_2}{(1 - Aq_2)(1 - Bq_2)}\right).$$

Задача 19. Доказать, что эллиптическими координатами на плоскости, ассоциированными с эллипсом:

$$\frac{x^2}{n} + \frac{y^2}{n + 1} = 1$$

(в смысле, аналогичном (5)), будут функции

$$q_1 = n + \sin^2 \xi, \quad q_2 = n - \operatorname{sh}^2 \eta,$$

где η, ξ — координаты из примера 4. Поэтому эти последние иногда называются эллипсоидальными координатами.

КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ. Имеет место общая теорема, согласно которой система уравнений (5.3), (5.4), имеющая квадратичный по скоростям интеграл движения, независимый с интегралом энергии, заменой переменных может быть приведена к лиувиллеву виду. Доказательство ее опирается на вычисление собственных значений и подходящую нормировку (ортогональных) собственных векторов квадратичной части второго интеграла относительно ри-