ше, чем число степеней свободы ($3N$). При $N=2$ положим

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \quad m=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2},$$

и получим уравнение

$$m\ddot{\mathbf{r}}=-\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad V(\mathbf{r})=-\gamma\frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|},$$

т. е. задача двух тел сводится к уже рассмотренной задаче Кеплера. Всюду дальше $N \geqslant 3$; система координат связана с центром масс, который движется равномерно и прямолинейно (поскольку $\mathbf{P}=\mathrm{const}$). Иначе говоря, мы считаем, что

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i=0, \quad \mathbf{P}=0.$$

Назовем движение в задаче N тел *планетарным*, если нет столкновений и попарные расстояния ограничены на всей оси времени t.

Теорема Якоби. *Планетарное движение возможно только при отрицательной константе интеграла энергии: $h<0$.*

Лемма 1. Полный барицентрический момент системы

$$I=\sum_i m_i \mathbf{r}_i^2=\frac{1}{M}\sum_{i,j} m_i m_j (\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)^2$$

(тождество Лагранжа). В самом деле,

$$MI=MI-\left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i\right)^2=\left(\sum_i m_i\right)\left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i^2\right)-\left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i\right)^2.$$

Легко убедиться, что коэффициенты при $m_i m_j$ в этом выражении всегда равны $(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)^2$.

Лемма 2 (формула Лагранжа). Вдоль движений

$$\frac{d^2 I}{dt^2}=-2V+4h.$$

Действительно, непосредственное дифференцирование дает

$$\frac{dI}{dt}=2\sum_i m_i(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i),$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2}=2\sum_i m_i(\mathbf{r}_i, \ddot{\mathbf{r}}_i)+2\Sigma m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2=-2\sum_i\left(\mathbf{r}_i, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}\right)+4T.$$

Если $F(z)$ — однородная функция от z степени n, $F(\lambda z)=\lambda^n F(z)$, то $\Sigma z_\alpha \frac{\partial F}{\partial z_\alpha}=nF$. Применяя этот факт к потенциалу, степень однородности которого равна -1, получаем

$$\frac{d^2 I}{dt^2}=2V+4T=4h-2V.$$