Доказательство теоремы. Пусть движение планетарное и $h \geqslant 0$. Тогда $\frac{d^2 I}{dt^2} > 4h$ (потенциал V всюду строго отрицателен); следовательно, I — функция, строго выпуклая вниз. Но любая такая функция стремится к бесконечности при $t \to \infty$ или $t \to -\infty$, откуда в силу леммы 1 вытекает неограниченность попарных расстояний, и получаем противоречие.

Замечание. В задаче трех тел тройные столкновения возможны лишь при $\mathbf{\Lambda}=0$ (теорема Вейерштрасса; без доказательства).

Задача 20. Доказать, что а) движение с заданным значением вектора $\mathbf{\Lambda}$ и постоянной энергии h происходит только при тех $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 = 0$, для которых

$$\Lambda^2/2I + V \leqslant h;$$

б) в плоской задаче трех тел (все $\mathbf{r}_i$ принадлежат неподвижной плоскости) последнее неравенство не только необходимо, но и достаточно, т. е. задает область возможности движения.

§ 11. КИНЕМАТИКА

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. Пусть $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ и $(\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta)$ — ортонормированные реперы одинаковой ориентации. Матрица перехода от первого ко второму реперу пусть будет

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \tag{11.1}$$

В ней по столбцам стоят координаты векторов нового репера в старом. Это собственная ортогональная матрица, т. е.

$$Q^{-1} = Q^* = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \tag{11.2}$$

$$\det Q > 0.$$

Отсюда вытекает, что $\det Q = 1$. Множество ортогональных матриц с определителем $+1$ образует группу относительно умножения, так называемую специальную ортогональную группу $SO(3)$.

Матрицы перехода применяются двумя способами.

1) Если произведена замена системы координат, т. е. все векторы $\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z$ надлежит разложить по новому реперу: $\mathbf{a} = a_\xi\mathbf{e}_\xi + a_\eta\mathbf{e}_\eta + a_\zeta\mathbf{e}_\zeta$, то

$$\begin{pmatrix} a_\xi \\ a_\eta \\ a_\zeta \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

2) Если в $\mathbf{R}^3$ имеется отображение специального вида: пово-