рот П, при котором попарные расстояния между точками остаются неизменными, а репер $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ преобразуется в репер $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$, то произвольный вектор $\mathbf{a}=a_x\mathbf{e}_x+a_y\mathbf{e}_y+a_z\mathbf{e}_z$ преобразуется в вектор $\mathbf{a}'=a'_x\mathbf{e}_x+a'_y\mathbf{e}_y+a'_z\mathbf{e}_z$ (разложенный по-прежнему по векторам исходного репера), причем

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}. \tag{11.4}$$

Примером сочетания этих двух точек зрения является

Лемма 1. Пусть поворот П имеет матрицу $Q$ в репере $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, а матрица $P$ — матрица перехода к другому реперу $\mathbf{e}_X$, $\mathbf{e}_Y$, $\mathbf{e}_Z$. Тогда поворот П в репере $\mathbf{e}_X$, $\mathbf{e}_Y$, $\mathbf{e}_Z$ имеет матрицу

$$Q'=P^{-1}QP.$$

В самом деле, пусть $\mathbf{a}'=\Pi\mathbf{a}$. Тогда в силу (3)

$$\begin{pmatrix} a'_X \\ a'_Y \\ a'_Z \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{pmatrix}.$$

Обращаясь теперь к (4), получаем

$$\begin{pmatrix} a'_X \\ a'_Y \\ a'_Z \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{pmatrix}=P^{-1}Q\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}=P^{-1}QP\begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{pmatrix}.$$

Лемма 2 (о вычислении матрицы композиции поворотов). Пусть $\Pi_1$ и $\Pi_2$ — два поворота, $Q_1$, $Q_2$ — их матрицы. Тогда поворот $\Pi=\Pi_2\circ\Pi_1$ имеет матрицу

а) $Q_2Q_1$, если $Q_2$ записана в исходном базисе $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$;

б) $Q_1Q_2$, если $Q_2$ записана в базисе, получившемся из $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ после первого поворота.

После курса линейной алгебры привычен первый вариант перемножения, тогда как на практике чаще применяется второй. На первый взгляд он кажется странным. Его мы и докажем. Пусть

$$\mathbf{a}^{(1)}=\Pi_1\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}^{(2)}=\Pi_2\mathbf{a},$$
$$(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{e}_Z)=\Pi_1(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z);$$

тогда по предположению

$$\begin{pmatrix} a_x^{(1)} \\ a_y^{(1)} \\ a_z^{(1)} \end{pmatrix}=Q_1\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_X^{(2)} \\ a_Y^{(2)} \\ a_Z^{(2)} \end{pmatrix}=Q_2\begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{pmatrix},$$

и в силу свойства (3)

$$\begin{pmatrix} a_X \\ a_Y \\ a_Z \end{pmatrix}=Q_1^{-1}\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix},$$