так что

$$\begin{pmatrix} a_x^{(2)} \\ a_y^{(2)} \\ a_z^{(2)} \end{pmatrix} = Q_1 Q_2 Q_1^{-1} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Композицию поворотов получим, подставив справа $(a_x^{(1)}, a_y^{(1)}, a_z^{(1)})$ вместо (a_x, a_y, a_z).

Задача 21. Доказать (и запомнить), что матрица поворота на угол φ вокруг оси Oz (против часовой стрелки, глядя сверху) имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 22. Показать, что повороты на $\pi/2$ вокруг $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ не перестановочны: $\Pi_2 \circ \Pi_1 \neq \Pi_1 \circ \Pi_2$. Таким образом, группа $SO(3)$ некоммутативна.

Задача 23. Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$ — векторы-столбцы, $[\bar{a}, \bar{b}]$ — их формальное векторное произведение:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Показать, что для любой собственной ортогональной матрицы

$$[Q\bar{a}, Q\bar{b}] = Q[\bar{a}, \bar{b}].$$

Выкладок производить не следует.

Задача 24. Пусть матрица (1) отвечает повороту на некоторый угол χ вокруг инвариантного вектора $\mathbf{i}$. Показать, что

а) след матрицы $\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 = 1 + 2\cos\chi$;

б) инвариантный вектор имеет одни и те же компоненты как в исходном, так и в преобразованном репере;

в) вектор с компонентами $(\gamma_2 - \beta_2,\ \alpha_3 - \gamma_1,\ \beta_1 - \alpha_2)$ является инвариантным и отличен от нуля при $\chi \neq \pi k$.

УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ. Пусть дано семейство поворотов $\Pi(t)$ (вращение) с матрицей $Q(t)$, гладко зависящей от времени. В результате репер $(\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta)$ как-то вращается.

Лемма 3. Матрица $\Omega = Q^{-1}\dot{Q}$ кососимметрична при каждом t. Действительно, дифференцируя тождество

$$Q^* Q \equiv E$$

и заменяя, где надо, Q^* на Q^{-1}, имеем

$$Q^{-1}\dot{Q} + \dot{Q}^* Q = Q^{-1}\dot{Q} + (Q^{-1}\dot{Q})^* \equiv 0.$$

Кососимметричные матрицы образуют алгебру Ли группы $SO(3)$, обозначаемую $so(3)$. Алгебра Ли — это векторное пространство с операцией $[v_1, v_2]$, билинейной по своим аргументам и удовлетворяющей следующим условиям: