1) антикоммутативность: $[v_1, v_2] = -[v_2, v_1]$,

2) тождество Якоби: $[[v_1, v_2], v_3] + [[v_3, v_1], v_2] + [[v_2, v_3], v_1] \equiv 0$. В случае $SO(3)$ $[\Omega_1, \Omega_2] = \Omega_1\Omega_2 - \Omega_2\Omega_1$. Простейший нетривиальный пример алгебры Ли — это пространство $\mathbf{R}^3(a_1, a_2, a_3)$ с операцией формального векторного умножения (ср. с § 3).

Задача 25. Проверить, что названные только что алгебры изоморфны в силу соответствия

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.5}$$

Задача 26. Соответствие $\Omega \leftrightarrow \omega$ имеет место тогда и только тогда, когда $\Omega\bar{a} = [\bar{\omega}, \bar{a}]$ для любого вектора-столбца $\bar{a}$.

Лемма 4. При построенном изоморфизме

$$P\bar{\omega} \leftrightarrow P\Omega P^{-1}, \tag{11.6}$$

если P — собственная ортогональная матрица. В самом деле, согласно задаче 26,

$$P\Omega P^{-1}a = P[\bar{\omega}, P^{-1}\bar{a}],$$

а в силу задачи 23

$$P[\bar{\omega}, P^{-1}\bar{a}] = [P\bar{\omega}, PP^{-1}\bar{a}] = [P\omega, \bar{a}].$$

Таким образом, для всех $\bar{a}$

$$P\Omega P^{-1}\bar{a} = [P\bar{\omega}, \bar{a}].$$

Снова апеллируя к задаче 26, получаем (6).

Основное определение. Угловой скоростью вращения $\Pi(t)$ называется вектор $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_\xi + \omega_2\mathbf{e}_\eta + \omega_3\mathbf{e}_\zeta$ такой, что

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \Omega = Q^{-1}\dot{Q}.$$

Подчеркнем, что *вектор угловой скорости* $\boldsymbol{\omega}$ *раскладывается по подвижному реперу*. Это вообще обычный прием в механике.

Замечание. Определение корректно, т. е. вектор $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от того, в каком именно репере записана матрица поворота $\Pi(t)$. Это доказывается с помощью лемм 1, 4 и формул (3).

Задача 27. Пусть $\Pi(t)$ — поворот вокруг оси Oz на угол $\varphi(t)$. Показать, что угловая скорость $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}_z$ (см. задачу 21).

Задача 28. Пусть $\boldsymbol{\omega} = \tilde{\omega}_1\mathbf{e}_x + \tilde{\omega}_2\mathbf{e}_y + \tilde{\omega}_3\mathbf{e}_z$. Тогда

$$\begin{pmatrix} \tilde{\omega}_1 \\ \tilde{\omega}_2 \\ \tilde{\omega}_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \tilde{\Omega} = \dot{Q}Q^{-1}.$$

Лемма Пуассона. Производные базисных векторов

$$\dot{\mathbf{e}}_\xi = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\xi]; \quad \dot{\mathbf{e}}_\eta = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\eta], \quad \dot{\mathbf{e}}_\zeta = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\zeta]. \tag{11.7}$$