Подчеркнем, что эти формулы записаны в инвариантном виде, т. е. участвующие в них векторы в принципе могут быть разложены по произвольному реперу. Доказательство, однако, проводится в репере $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$. Имеем, например,

$$\mathbf{e}_\xi = Q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому в силу определения угловой скорости и задачи 26

$$\frac{d\mathbf{e}_\xi}{dt} = \dot{Q}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Q\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Q\left[\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

Согласно формуле (3), справа стоят компоненты вектора $[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_\xi]$, пересчитанные из репера $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$ в репер $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$.

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА. *Твердым телом* называется множество точек, которые движутся так, что попарные расстояния между ними не изменяются. Если в теле есть три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, то можно образовать ортонормированный репер, жестко связанный с телом, в котором координаты всех точек тела будут постоянны, например:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 29. Получить такой репер с помощью операций над векторами $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.

Угловой скоростью тела называется угловая скорость всякого связанного с ним репера. На доказательстве корректности определения задерживаться не будем (см. замечание перед задачей 27). То, что точка A перемещается, роли не играет; важна лишь ориентация подвижного репера.

Теорема Эйлера. *Пусть ω — угловая скорость твердого тела, A, B — произвольные его точки. Тогда*

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + [\boldsymbol{\omega}\times\overline{AB}]. \qquad (11.8)$$

Доказательство. Свяжем с телом репер $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$, построенный в точке A. Пусть (ξ, η, ζ) — постоянные координаты точки B в этом репере. Тогда в системе $Oxyz$ ее координаты

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + Q\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \qquad (11.9)$$

где a_x, a_y, a_z — координаты точки A. Дифференцируем:

$$\mathbf{v}_B = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} + \dot{Q}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a}_x \\ \dot{a}_y \\ \dot{a}_z \end{pmatrix} + QQ^{-1}\dot{Q}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} =$$