Вопрос. Какие точки поезда движутся в противоположном направлении?

Пример 1. Диск катится по прямой без проскальзывания (рис. 30). Пусть x — первая координата его центра A, φ — абсолютный угол поворота. Покажем, что между x и φ имеется тождественное соотношение (связь). А именно

$$x+r\varphi=\text{const}. \tag{11.10}$$

Имеем

$$\mathbf{v}_A=[\boldsymbol{\omega}\times\overline{CA}];\quad \dot{x}\mathbf{e}_x=[\dot{\varphi}\mathbf{e}_z\times r\mathbf{e}_y]=-r\dot{\varphi}\mathbf{e}_x,$$

откуда

$$\dot{x}+r\dot{\varphi}=0.$$

Что и требовалось. Тождество (10), разумеется, понятно из чисто геометрических соображений: дуга, прокатившаяся по прямой, по длине равна пройденному центром пути. Однако в мало-мальски более сложной задаче такого рода соображения, как показывает практика, неизменно сопряжены с ошибками. Кинематические приемы намного эффективнее.

Задача 30. Диск радиуса r катится без проскальзывания по окружности радиуса ρ (рис. 32). Абсолютный угол поворота диска пусть будет φ, а угол поворота радиуса-вектора центра диска, проведенного из центра неподвижной окружности, пусть будет Θ. Найти связь между Θ и φ.

Ответ: $(\rho-r)\Theta+r\varphi=\text{const}$ (а вовсе не $\rho\Theta=r\varphi$ — обычный скорый ответ).

ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ. Пусть точка P движется в пространстве, $\mathbf{r}=\overline{OP}$ — ее радиус-вектор в системе координат $Oxyz$. Наряду с последней пусть применена подвижная система координат $A\xi\eta\zeta$ и пусть $\boldsymbol{\rho}=\overline{AP}$ — радиус-вектор точки P в ней (рис. 10). Положим

$$\mathbf{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\rho}=\overline{AP}=\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix};$$

тогда

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}+Q\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix},$$

так же как и при доказательстве формулы Эйлера, с одним, но существенным отличием: величины ξ, η, ζ теперь суть функции времени. Дифференцируя с учетом сказанного, получаем

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{a}_x\\\dot{a}_y\\\dot{a}_z\end{pmatrix}+Q\left[\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}\right]+Q\begin{pmatrix}\dot{\xi}\\\dot{\eta}\\\dot{\zeta}\end{pmatrix}. \tag{11.11}$$