ра $\omega_{\text{пер}}$ в репере $\mathbf{e}_X$, $\mathbf{e}_Y$, $\mathbf{e}_Z$, а по лемме 4 новому столбцу соответствует как раз первое слагаемое формулы (12).

Пример 2. К диску радиуса r ортогонально прикреплена в центре штанга длины d. Диск катится по горизонтальной плоскости так, что свободный конец штанги A неподвижен на высоте r над плоскостью. Пусть ψ — абсолютный угол поворота штанги вокруг вертикали, φ — угол поворота диска в подвижной системе координат $A\xi\eta\zeta$ такой, что ось $A\zeta$ вертикальна, ось $A\xi$ направлена по штанге. Вычислить связь между ψ, φ (рис. 11).

Имеем

$$\omega_{\text{отн}} = \dot\varphi\mathbf{e}_\xi, \quad \omega_{\text{пер}} = \dot\psi\mathbf{e}_\zeta, \quad \omega_{\text{абс}} = \dot\varphi\mathbf{e}_\xi + \dot\psi\mathbf{e}_\zeta.$$

С другой стороны, скорость в точке касания

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + [\omega_{\text{абс}} \times \overline{OP}] = 0, \quad \mathbf{v}_0 = 0,$$

так что

$$[\omega_{\text{абс}} \times \overline{OP}] = 0,$$

$$[(\dot\varphi\mathbf{e}_\xi + \dot\psi\mathbf{e}_\zeta) \times (d\mathbf{e}_\xi - r\mathbf{e}_\zeta)] \equiv 0,$$

$$r\dot\varphi + d\dot\psi = 0,$$

что и требовалось.

Задача 32. Шар с ортогонально прикрепленной к нему штангой длины $l-r$ катится по горизонтальной плоскости так (рис. 12), что свободный конец штанги неподвижно лежит на плоскости. Пусть v — абсолютная скорость центра шара. Определить абсолютную и относительную угловые его скорости в системе $A\xi\eta\zeta$, в которой горизонтальная ось $A\eta$ перпендикулярна штанге.

Ответ:

$$\omega_{\text{абс}} = -\frac{v}{r}\mathbf{e}_\xi, \quad \omega_{\text{отн}} = -\frac{v}{r}\mathbf{e}_\xi - \frac{v}{\sqrt{l^2 - r^2}}\mathbf{e}_\zeta.$$

§ 12. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрим твердое тело, масса которого распределена по кривой, поверхности или объему $\mathscr{C}$; обозначим через ρ плотность массы, зависящую, вообще говоря, от точки. Введем для краткости элемент массы $dm = \rho d\tau$, где $d\tau$ — элемент дуги, площади или объема соответственно (более общо говорить о мере Лебега dm; тогда охватывается и дискретное распределение масс). В произвольной декартовой системе координат $Oxyz$ в случае, например, пространственного распределения масс $dm = \rho(x, y, z)dxdydz$. Условимся писать сокращенно:

$$\int\limits_{\mathscr{C}} f(P)\,dm = \int\limits_{(x,y,z)\in\mathscr{C}} f(x, y, z)\,\rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$