Конкретное выражение $\rho(x, y, z)$ зависит от того, как твердое тело расположено относительно системы координат. Если система координат связана с телом, то выражение ρ будет одним и тем же во всех положениях тела. Мы будем вычислять интегралы как скалярных, так и векторных функций точки $P \in \mathscr{C}$. Величина

$$M = \int_{\mathscr{C}} dm$$

(интеграл от единицы) называется массой тела, величина

$$\mathbf{s} = \frac{1}{M} \int_{\mathscr{C}} \overline{OP}\, dm -$$

радиус-вектором центра масс тела относительно точки O.

ОПЕРАТОР ИНЕРЦИИ. Это узловое понятие, с которым мы будем постоянно оперировать на протяжении всего параграфа. По определению *оператор инерции относительно точки O* переводит произвольный вектор $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$ в вектор

$$\Upsilon_O(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{C}} [\overline{OP} \times [\mathbf{u} \times \overline{OP}]]\, dm.$$

Легко проверить, что этот оператор линеен и самосопряжен (симметричен):

$$(\mathbf{u}_1 \Upsilon_O(\mathbf{u}_2)) = (\mathbf{u}_2, \Upsilon_O(\mathbf{u}_1)).$$

Определение. *Моментом инерции* тела относительно прямой l называется число $I(l) = (\mathbf{f}, \Upsilon_O(\mathbf{f}))$, где O — некоторая точка l, $\mathbf{f}$ — единичный направляющий вектор прямой.

Покажем, что $I(l)$ не зависит от выбора точки O на прямой:

$$I(l) = \left(\mathbf{f}, \int_{\mathscr{C}} [\overline{OP} \times [\mathbf{f} \times \overline{OP}]]\, dm\right) = \left(\mathbf{f}, \int_{\mathscr{C}} (\mathbf{f} \cdot \overline{OP}^2 - \overline{OP}(\mathbf{f}, \overline{OP}))\, dm\right) =$$

$$= \int_{\mathscr{C}} ((\overline{OP}^2 - (\mathbf{f}, \overline{OP})^2)\, dm = \int_{\mathscr{C}} d^2(P, l)\, dm \geqslant 0,$$

здесь $d(P, l)$ — расстояние от точки P до прямой l.

Матричное выражение оператора инерции. Пусть $Oe_\xi e_\eta e_\zeta$ — репер, связанный с телом; тогда

$$\Upsilon_O(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{C}} \{\overline{OP}^2 \mathbf{u} - \overline{OP}(\mathbf{u}, \overline{OP})\}\, dm = \begin{pmatrix} I_1 & -J_3 & -J_2 \\ -J_3 & I_2 & -J_1 \\ -J_2 & -J_1 & I_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_\xi \\ u_\eta \\ u_\zeta \end{bmatrix},$$

где

$$I_1 = \int_{\mathscr{C}} (\eta^2 + \zeta^2)\, dm, \quad I_2 = \int_{\mathscr{C}} (\xi^2 + \zeta^2)\, dm, \quad I_3 = \int_{\mathscr{C}} (\xi^2 + \eta^2)\, dm,$$

$$J_1 = \int_{\mathscr{C}} \eta\zeta\, dm, \quad J_2 = \int_{\mathscr{C}} \xi\zeta\, dm, \quad J_3 = \int_{\mathscr{C}} \xi\eta\, dm.$$