Можно заметить, что $I_1+I_2 \geqslant I_3$, $I_3+I_1 \geqslant I_2$, $I_2+I_3 \geqslant I_1$. Если $I_1+I_2=I_3$, то все тело лежит в плоскости $O\xi\eta$. Если $I_3=0$, то все тело лежит на оси $O\zeta$.

Задача 33. Проверить, что выполняются неравенства типа

а) $J_1^2 \leqslant I_2 I_3$;

б) $4J_1^2 \leqslant I_1^2-(I_2-I_3)^2$.

Какое из этих неравенств сильнее?

ГЛАВНЫЕ ОСИ. Собственный репер $O\mathbf{e}\mathbf{e}'\mathbf{e}''$ самосопряженного оператора Υ_O называется *главным* в точке O. Матрица оператора принимает вид

$$\begin{pmatrix} A_O & 0 & 0 \\ 0 & B_O & 0 \\ 0 & 0 & C_O \end{pmatrix}.$$

Числа A_O, B_O, C_O называются главными моментами инерции в точке O. Плоскость (прямая) называется главной для некоторой своей точки O, если содержит два вектора (один из векторов) главного репера в точке O.

Задача 34. Плоскость (ось) симметрии распределения масс тела есть главная для всех своих точек. Доказать.

Задача 35. А. Пусть S — центр масс, Q — произвольная точка, $\mathbf{f}$ — единичный вектор, d — расстояние между прямыми $Q\mathbf{f}$, $S\mathbf{f}$. Тогда $I(Q\mathbf{f})=I(S\mathbf{f})+Md^2$ (формула Гюйгенса—Штейнера).

Б. Пусть $Sxyz$ — декартова система координат с осями, главными в S, и $A_S=Ma^2>B_S=Mb^2>C_S=Mc^2$. Показать, что главные направления в точке $P(x, y, z)$ параллельны координатным линиям эллиптических координат, ассоциированных с *гирационным эллипсоидом*:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

а соответствующие главные моменты инерции суть

$$A_P(B_P,\ C_P)=M(x^2+y^2+z^2)+Mq_1(Mq_2,\ Mq_3).$$

ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ. Имеются в виду импульс, кинетический момент и кинетическая энергия, которые уже рассматривались применительно к системе свободных материальных точек в § 10. В случае, когда система точек образует твердое тело, выражения для этих величин принимают специфический вид в связи с тем, что скорости точек тела образуют распределение, описываемое формулой Эйлера: $\mathbf{v}_P=\mathbf{v}_S+[\boldsymbol{\omega}\times\overline{SP}]$. Таким образом, в каждый момент времени скорости зависят от точки тела, а зависимость их от времени проявляется только через векторы $\mathbf{v}_S$, $\boldsymbol{\omega}$, которые являются общими для всех точек тела.

Лемма 1. Имеют место формулы:

(А) $\mathbf{P}=M\dot{\mathbf{s}}$;

(Б) $\boldsymbol{\Lambda}_O=M[\mathbf{s}\times\dot{\mathbf{s}}]+\boldsymbol{\Lambda}_S$, $\boldsymbol{\Lambda}_S=\Upsilon_S(\boldsymbol{\omega})$;