Для доказательства надо продифференцировать Λ_O в силу уравнений (1) и (2), учитывая в них, конечно, и силу $\mathbf{R}$ (которая уничтожится), а затем по (8) изменить точку приведения S на O.

Лемма 4. Всегда

$$\Lambda_O = \Upsilon_O(\omega), \quad T_O = \frac{1}{2}(\omega, \Lambda_O(\omega)). \tag{12.11}$$

Доказательство: ср. с леммой 1.

Утверждения леммы 2 сохраняют силу, только брать надо $A = A_O$, $B = B_O$, $C = C_O$.

УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА. Разложим по главному реперу, связанному с телом в точке O, векторы ω и G_0:

$$\omega = p\mathbf{e} + q\mathbf{e}' + r\mathbf{e}'', \quad \mathbf{G}_O = G\mathbf{e} + G'\mathbf{e}' + G''\mathbf{e}'', \tag{12.12}$$

затем продифференцируем кинетический момент

$$\Lambda_O = Ap\mathbf{e} + Bq\mathbf{e}' + Cr\mathbf{e}'',$$

пользуясь формулами Пуассона (§ 11):

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = [\omega \times \mathbf{e}], \quad \frac{d\mathbf{e}'}{dt} = [\omega \times \mathbf{e}'], \quad \frac{d\mathbf{e}''}{dt} = [\omega \times \mathbf{e}''].$$

Векторное уравнение (10) приводит нас к уравнениям Эйлера:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = G, \\ B\dot{q} + (A - C)rp = G', \\ C\dot{r} + (B - A)pq = G''. \end{cases} \tag{12.13}$$

Величины G, G', G'' зависят, вообще говоря, от положения тела и его угловой скорости (т. е. совокупно — от его состояния), так что эта система уравнений в общем случае не замкнута.

СЛУЧАЙ ЭЙЛЕРА. Самый простой вариант уравнений (13) получается при $G = G' = G'' = 0$. Тогда система уравнений (13) становится замкнутой и описывает движение вектора ω относительно главного репера. Легко увидеть, что интегралами уравнений Эйлера в этом случае являются функции

$$\Lambda^2 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2, \quad T = {}^1/_2(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Например, то, что T — интеграл, получается так:

$$\frac{dT}{dt} = Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = -p(C - B)qr - q(A - C)rp - $$
$$- r(B - A)pq = 0.$$

Таким образом, первых интегралов вполне достаточно, чтобы решить уравнения (13), а именно (подробности опускаем) можно получить решение в эллиптических функциях.

Исследуем решения качественно. Пусть $T = h$ и $\Lambda^2 = 2hD$. Будем считать для определенности $A > B > C$; тогда $D \in [C, A]$. Пересечение эллипсоидов $T = h$ и $\Lambda^2 = 2hD$ совпадает с пересечением