чия связей не произвольны. *Многообразие положений системы*

$$\mathfrak{M}_t = \{\mathbf{r} : f_\rho(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \rho = 1, \ldots, r\}$$

есть поверхность в $\mathbf{R}^{3N} = \mathbf{R}^3 \times \ldots \times \mathbf{R}^3$, зависящая, вообще говоря, от времени. Требуется, чтобы

$$\operatorname{rang} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_r)}{\partial(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)}\bigg|_{\mathfrak{M}} = r;$$

тогда $\mathfrak{M}_t$ не имеет особенностей и $\dim \mathfrak{M}_t = 3N - r$ (это — *число степеней свободы системы*).

Зафиксируем произвольно мгновение t. Набор векторов $\boldsymbol{\delta} = \{\boldsymbol{\delta}_1, \ldots, \boldsymbol{\delta}_N\}$ является касательным к многообразию положений $\mathfrak{M}_t$ в точке $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^{3N}$, когда

$$\sum_\nu \left(\frac{\partial f_\rho}{\partial \mathbf{r}_\nu}\bigg|_{\mathbf{r}}, \ \boldsymbol{\delta}_\nu \right) = 0, \ \rho = 1, \ldots, r. \tag{13.2}$$

Касательный вектор можно трактовать как виртуальную скорость $\boldsymbol{\delta} = \frac{d\mathbf{r}}{d\alpha}$, где $\mathbf{r}(\alpha) \in \mathfrak{M}_t$ при фиксированном t.

Теперь «пустим часы». Если с течением времени

$$f(\mathbf{r}(t), t) = 0,$$

т. е. имеется перемещение системы, согласованное со связями, то набор скоростей $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{\mathbf{r}}_1, \ldots, \dot{\mathbf{r}}_N)$ удовлетворяет уравнениям

$$\sum_\nu \left(\frac{\partial f_\rho}{\partial \mathbf{r}_\nu}, \ \dot{\mathbf{r}}_\nu \right) + \frac{\partial f_\rho}{\partial t} = 0. \tag{13.3}$$

Сравнивая с (2), видим, что наборы скоростей являются касательными тогда, когда связи стационарны:

$$\frac{\partial f_\rho}{\partial t} \equiv 0.$$

При этом многообразие положений не зависит от времени.

ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА — ЛАГРАНЖА. Определение. Набор функций $\mathbf{r}(t) = \{\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_N(t)\}$ называется *движением* механической системы, если

1) удовлетворяются связи: $f_\rho(\mathbf{r}_1(t), \ldots, \mathbf{r}_N(t)) \equiv 0$;

2) для любого касательного набора в положении $\mathbf{r}(t)$ справедливо

$$\Sigma (m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu, \ \boldsymbol{\delta}_\nu) = 0. \tag{13.4}$$

Комментарий. Последнее условие можно интерпретировать как условие ортогональности в $\mathbf{R}^{3N}$ (ср. с частным случаем динамики точки в § 5). Отсюда эквивалентная запись этого условия:

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu - \mathbf{F}_\nu = \sum_\rho \lambda_\rho \frac{\partial f_\rho}{\partial \mathbf{r}_\nu},$$