Нечто аналогичное можно сказать и о любой системе точек со связями. Подчеркнем, что корректно определены возможные перемещения лишь всей системы точек в совокупности.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. Пусть $m=(m_1, ..., m_N)$. Динамической функцией называется семейство скалярных или векторных функций

$$\Phi^N_m(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = \Phi^N_{m_1, \dots, m_N}(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N),$$

удовлетворяющих следующим естественным условиям:

а) значение Φ^N не изменяется при перенумеровке масс:

$$\Phi^N_{m_1, \dots, m_N}(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \Phi^N_{m_{i_1}, \dots, m_{i_N}}(\dot{\mathbf{r}}_{i_1}, \dots, \dot{\mathbf{r}}_{i_N}, \mathbf{r}_{i_1}, \dots, \mathbf{r}_{i_N});$$

б) $\Phi^N_{\lambda m} = \lambda \Phi^N_m$ (однородность);

в) $\Phi^N_{m_1+m_2} = \Phi^N_{m_1} + \Phi^N_{m_2}$ (аддитивность);

г) если $m_N = 0$, то

$$\Phi^N_{m_1, \dots, m_{N-1}, 0}(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) =$$
$$= \Phi^{N-1}_{m_1, \dots, m_{N-1}}(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_{N-1}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N-1}).$$

Лемма. Динамические функции имеют вид

$$\Phi^N_m = \sum_\nu m_\nu \Phi(\dot{\mathbf{r}}_\nu, \mathbf{r}_\nu),$$

где $\Phi(\dot{\mathbf{r}}_0, \mathbf{r}_0)$ — некоторая функция двух векторных аргументов.

Доказательство проводится индукцией по N:

$$\Phi^N_{m_1, \dots, m_N}(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) =$$
$$= \Phi^{N-1}_{m_1, \dots, m_{N-1}}(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_{N-1}, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N-1}) + m_N \Phi(\dot{\mathbf{r}}_N, \mathbf{r}_N).$$

Детали оставляются в качестве упражнения.

Примеры динамических функций:

А) *импульс*

$$P_x = \sum_\nu m_\nu \dot{x}_\nu \quad (\Phi = \dot{x}_0),$$

$$\mathbf{P} = \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \quad (\Phi = \dot{\mathbf{r}}_0);$$

Б) *кинетический момент*

$$\Lambda_{Oz} = \sum_\nu m_\nu (x_\nu \dot{y}_\nu - y_\nu \dot{x}_\nu) \quad (\Phi = x_0 \dot{y}_0 - y_0 \dot{x}_0),$$

$$\Lambda_O = \sum_\nu m_\nu [\mathbf{r}_\nu \times \dot{\mathbf{r}}_\nu] \quad (\Phi = [\mathbf{r}_0 \times \dot{\mathbf{r}}_0]);$$