здесь S — центр шара. Пусть

$$\overline{OS}=(x, y, r), \quad \boldsymbol{\omega}=\omega_x\mathbf{e}_x+\omega_y\mathbf{e}_y+\omega_z\mathbf{e}_z,$$
$$\mathbf{v}_S=\dot{x}\mathbf{e}_x+\dot{y}\mathbf{e}_y, \quad \overline{SP}=-r\mathbf{e}_z;$$

тогда

$$\dot{x}-r\omega_y=0, \quad \dot{y}+r\omega_x=0. \tag{14.2}$$

СВОЙСТВО НЕГОЛОНОМНОСТИ относится к связям, наложенным на шар, т. е. к предписаниям, к предварительным условиям, в силу которых ему позволено двигаться только так, чтобы тождественно выполнялись условия $z=r$ и (2). Эти связи неголономны в том смысле, что ограничивают распределение скоростей точек шара, но не мешают ему занять произвольное положение на плоскости.

Пусть в положении 1 тело касается плоскости в точке Q_1 точкой P_1, а в положении 2 — в точке Q_2 точкой P_2. Знание этих точек, разумеется, не определяет однозначно названных положений (сохраняется возможность вращать шар вокруг нормали к плоскости, проведенной в точке касания), но составляет основу доказательства вышевысказанного утверждения.

Это доказательство станет яснее, если мы сначала покажем голономную задачу: наложим на шар дополнительное ограничение— разрешим кататься только вдоль оси Ox (ср. с примером 1 из § 11 — качение диска по прямой). Теперь корректно определен угол поворота φ шара вокруг направления Oy, причем $\omega_y=\dot{\varphi}$, $\omega_z=\omega_x=0$. Получаем

$$\dot{x}=r\dot{\varphi},$$

откуда после интегрирования (обратим внимание на эту операцию)

$$x=r\varphi+\mathrm{const}.$$

При качении вдоль прямой соприкосновение с плоскостью происходит только в точках того большого круга, который проходит через P_1, P_2. Ясно, что если длина дуги $\overline{P_1P_2}$ отличается от расстояния $|\overline{Q_1Q_2}|$ на $2\pi rn$, то мы можем так прокатить тело по прямой, что из первого положения оно перейдет во второе, иначе — не можем.

Вернемся к исходной задаче. Непосредственно формулы (2) проинтегрировать мы не можем. В том ли только дело, что мы пока что не научились удачно вводить некоторые углы поворота φ, ψ с тем, чтобы получить $\omega_y=\dot{\varphi}$, $\omega_x=\dot{\psi}$? Нет. Никаких подобных переменных ввести невозможно, ибо ничто нам (вслед за Пуанкаре) не мешает нарисовать на поверхности шара кривую P_1P_2 длины $|\overline{Q_1Q_2}|$, прокатить шар, опираясь о плоскость точками этой дуги, а когда точки P_2 и Q_2 совместятся, довернуть тело до нужного положения, вращая его вокруг вертикали.

ШАР НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ. На однород-