

ный шар действуют две силы: вес mg , приложенный в центре S , и реакция опоры R , приложенная в точке касания P . Из соображений симметрии ясно, что

$$\Lambda_S = I\omega,$$

где I — центральный момент инерции шара. Нетрудно показать, что $I = (2/5)mr^2$. Уравнения движения суть

$$m \frac{dv_S}{dt} = mg + R, \quad (14.3)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = [\overline{SP} \times R]. \quad (14.4)$$

Легко увидеть, что $(\dot{v}_S, \overline{SP}) = 0$ (по условию) и $(\dot{\omega}, SP) = 0$ (из второго уравнения). Пусть R_{\parallel} — компонента силы реакции, параллельная плоскости. Тогда

$$m\dot{v}_S = R_{\parallel}, \quad I\dot{\omega} = [\overline{SP} \times R_{\parallel}].$$

Подставляя первое во второе и используя (1), получаем

$$\begin{aligned} I\dot{\omega} &= m[\overline{SP} \times \dot{v}_S] = m[\overline{SP} \times [\overline{SP} \times \dot{\omega}]] = m\overline{SP}(\overline{SP}, \dot{\omega}) - \\ &- m(\overline{SP})^2 \dot{\omega} = -mr^2 \dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} \equiv 0 \Rightarrow \dot{v}_S = 0 \Rightarrow R_{\parallel} = 0. \end{aligned}$$

Шар катится равномерно и вращается равномерно.

Задача 39. Шар катится по горизонтальной плоскости, которая перемещается вдоль самой себя со скоростью $u(t)$ поступательно. Пусть на плоскости нарисована кривая. Доказать, что можно так двигать плоскость, что шар будет катиться по этой кривой.

Указание. Получить соотношение

$$\frac{dv_{oT_{\text{ш}}}}{dt} = -\frac{5}{7} \frac{du}{dt}$$

и использовать его.

Задача 40. Шар катится по горизонтальной плоскости, которая вращается с вертикальной угловой скоростью Ω . Показать, что с точки зрения неподвижного наблюдателя шар катится по окружности (и вовсе не «укатывается в бесконечность»).

Указание. Получить соотношение

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2}{7} \frac{d}{dt} [\Omega \times \overline{OP}] = \frac{2}{7} [\Omega \times v]$$

и использовать его.

ШАР В ВЕРТИКАЛЬНОМ ЦИЛИНДРЕ. Продолжим знакомство со странностями движения при наличии неголономных связей. Пусть шар катится без проскальзывания в неподвижном цилиндре радиуса $\rho + r$. Система уравнений движения:

$$v_S + [\omega \times \overline{SP}] = 0, \quad (14.5)$$