$$m\frac{d\mathbf{v}_S}{dt}=m\mathbf{g}+\mathbf{R}, \qquad (14.6)$$

$$I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=[\overline{SP}\times\mathbf{R}]=m\left[\overline{SP}\times\left[\frac{d\mathbf{v}_S}{dt}-\mathbf{g}\right]\right]. \qquad (14.7)$$

Теперь, в отличие от вышеприведенных задач, $\overline{SP}$ уже не имеет постоянного направления. Это неудобство можно ослабить, воспользовавшись вращающейся системой координат $O\xi\eta\zeta$, в которой центр масс находится все время в плоскости $O\xi\zeta$, а ось $O\zeta$ совпадает с осью цилиндра. Будем все векторы раскладывать по реперу $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$. При дифференцировании векторов непременно надо учитывать, что векторы $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$ вращаются. Пусть φ — угол поворота нашей системы координат вокруг оси $O\zeta$, z — вертикальная координата центра шара. Выкладки начнем с разложений

$$OS=\rho\mathbf{e}_\xi+z\mathbf{e}_\zeta, \quad \boldsymbol{\omega}=\omega_\xi\mathbf{e}_\xi+\omega_\eta\mathbf{e}_\eta+\omega_\zeta\mathbf{e}_\xi.$$

Выполняя дифференцирования этих векторов с учетом

$$\dot{\mathbf{e}}_\xi=\dot\varphi\mathbf{e}_\eta, \quad \dot{\mathbf{e}}_\eta=-\dot\varphi\mathbf{e}_\xi,$$

и подставляя в (5), (7), получим в проекциях на $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$, $\mathbf{e}_\zeta$

$$\rho\dot\varphi=-r\omega_\zeta, \qquad (14.5\xi)$$

$$\dot z=r\omega_\xi, \qquad (14.5\zeta)$$

$$(2/5)\,(\dot\omega_\xi-\dot\varphi\omega_\eta)=0, \qquad (14.7\xi)$$

$$(2/5)\,mr^2(\dot\omega_\eta+\omega_\xi\dot\varphi)=(-r\ddot z+rg)\,m, \qquad (14.7\eta)$$

$$(2/5)\,mr^2\dot\omega_\zeta=r\rho\ddot\varphi m. \qquad (14.7\zeta)$$

Из (5ξ) и (7ζ)

$$\dot\omega_\zeta=0, \quad \omega_\zeta=c_1=\text{const}, \quad \dot\varphi=-(r/\rho)\,c_1=\text{const}.$$

Из (7ξ) и (5ζ)

$$0=\dot\omega_\xi-\omega_\eta\dot\varphi=+\dot\omega_\xi+\frac{\dot z}{r}\,\frac{r}{\rho}\,c_1=\dot\omega_\xi+\frac{\dot z}{\rho}\,c_1,$$

$$\omega_\xi+\frac{z}{\rho}\,c_1=c_2=\text{const}.$$

Внеся все полученное в (7η), получим

$$\frac{2}{5}\,r\Bigg(\underbrace{\frac{\ddot z}{r}}_{\omega_\eta}-\underbrace{\left(c_2-c_1\frac{z}{\rho}\right)}_{\omega_\xi}\frac{r}{\rho}\,c_1\Bigg)=-\ddot z-g,$$

$$\ddot z+\underbrace{\frac{2}{7}\,\frac{r^2}{\rho}\,c_1}_{k}z=\underbrace{\frac{2}{7}\,\frac{c_1c_2r^2}{\rho}-\frac{5}{7}\,g}_{k}.$$

Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$z(t)=\frac{K}{k}+A\cos\sqrt{k}\,(t-t_0).$$

Следовательно, шар движется вверх-вниз по синусоидальному закону.