Задача 41. Показать, что

а) наряду с интегралами:

$$\omega_\zeta = c_1,\ \omega_\xi + \frac{z}{\rho}\omega_\zeta = c_2,$$

есть еще интеграл энергии

$$\frac{mv^2}{2} + I\frac{\omega^2}{2} + mgz = h;$$

б) амплитуда колебаний по z при начальных условиях $\omega_0 \| e_z$ (для простоты) равна

$$\frac{5}{2}\frac{\rho^2}{r^2}\frac{g}{\omega_0^2}.$$

Странность поведения шара в цилиндре до некоторой степени объясняется тем, что все взаимодействие шара с поверхностью цилиндра мы свели к появлению единственной силы, приложенной в единственной точке касания. На деле взаимодействие, разумеется, сложнее. Тем не менее при игре в баскетбол иногда можно наблюдать, как мяч, уже оказавшийся несколько ниже кольца, вдруг выкатывается из него.

§ 15. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА. ПРИВЕДЕНИЕ ПО РАУСУ

Рассматривается голономная система с потенциальными силами: $\mathbf{F}_\nu = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_\nu}$, причем потенциалу пока что не возбраняется зависеть от времени. Пусть на многообразии положений $\mathfrak{M}_t$ имеются локальные координаты $q_1, \ldots, q_n$, в силу чего

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, \ldots, q_n, t), \quad \nu = 1, \ldots, N.$$

Следовательно, скорости

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}. \tag{15.1}$$

В каждой точке $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) \in \mathfrak{M}_t$ есть n линейно независимых наборов, касательных к $\mathfrak{M}_t$:

$$\boldsymbol{\delta}_i = \left\{\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_i}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{r}_N}{\partial q_i}\right\}$$

(согласно замечанию о дифференцировании при фиксированном t из предыдущего параграфа). Подставим эти касательные наборы в основное уравнение принципа д'Аламбера — Лагранжа:

$$\sum_\nu \left(m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right) = \sum_\nu \left(\mathbf{F}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right).$$

Справа имеем

$$\sum_\nu \left(-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_\nu}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad V(q, t) = V(\mathbf{r}(q, t), t).$$