Преобразуем левую часть, используя соотношения:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}=\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_i},$$

которые легко выводятся из (1):

$$\sum_\nu m_\nu\left(\ddot{\mathbf{r}}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right)=\frac{d}{dt}\sum_\nu m_\nu\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right)-\sum_\nu m_\nu\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu, \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_\nu m_\nu\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i}\right)-\sum_\nu m_\nu\left(\dot{r}_\nu, \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_i}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\sum_\nu m_\nu\frac{\dot{\mathbf{r}}^2_\nu}{2}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_\nu\frac{m_\nu\dot{\mathbf{r}}^2_\nu}{2}=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i},$$

где кинетическая энергия

$$T=\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu^2=T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \ldots, q_n, t)$$

в силу (1). В итоге приходим к

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \quad L=T-V, \quad i=1, \ldots, n. \tag{15.2}$$

Принцип д'Аламбера—Лагранжа для голономных систем с потенциальными силами эквивалентен уравнениям Лагранжа (2).

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ КАК ФУНКЦИЯ СКОРОСТЕЙ

$$T=\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\dot{\mathbf{r}}_\nu^2=\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\left(\sum_i\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\left(\sum_i\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}, \sum_j\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sum_\nu m_\nu\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j+\sum_i\sum_\nu m_\nu\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right)\dot{q}_i+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j+\sum_i a_i\dot{q}_i+a=T_2+T_1+T_0,$$

где T_p обозначает однородную форму скоростей степени p. Если $T=T_2$, то мы имеем так называемую классическую натуральную систему.

СТРУКТУРА ИНТЕГРАЛА ЭНЕРГИИ. Если $\frac{\partial L}{\partial t}\equiv 0$, то имеет место *интеграл «энергии»* (в кавычках)

$$H=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L.$$