Этот факт не зависит от структуры L. Действительно,

$$\frac{dH}{dt}=\sum_i\left(\dot q_i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)+\sum_i\left(\ddot q_i\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)-\sum_i\left(\dot q_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)-$$

$$-\sum_i\left(\ddot q_i\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)=\sum_i\dot q_i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)=0.$$

Для механической системы имеем так называемый интеграл Якоби—Пенлеве:

$$H=\sum_i\dot q_i\frac{\partial T_2}{\partial \dot q_i}+\sum_i\dot q_i\frac{\partial T_1}{\partial \dot q_i}-T_2-T_1-T_0+V=$$

$$=2T_2+T_1-T_2-T_1-T_0+V=T_2-T_0+V=h,$$

который, что интересно, не содержит T_1. Поскольку T_2 положительно определена, область возможности движения $\mathfrak{M}^h=\{-T_0+ +V\leqslant h\}$. Для классических натуральных систем $\mathfrak{M}^h=\{V\leqslant h\}$, а H интеграл энергии (без кавычек).

Задача 42. Шар с невесомой штангой из задачи 32 (§ 11) катится по наклонной плоскости; дано: $d=r\operatorname{tg}\theta$, масса m, моменты инерции $A=B=C=(2/5)mr^2$, угол наклона плоскости β, $\varphi=0$ — направление наибольшего наклона. Доказать, что

а) уравнение Лагранжа имеет вид

$$\ddot\varphi=-\frac{5}{7}\frac{g}{d}\sin\beta\sin\varphi;$$

б) полная энергия равна

$$H=\frac{7}{10}md^2\dot\varphi^2-mgd\sin\beta\cos\varphi;$$

в) если h — константа энергии, то шар может двигаться с $H=h$, не отрываясь от плоскости (принято $R_\eta\equiv0$) в области

$$\mathfrak{M}^h=\{-\sin\beta\cos\varphi\leqslant h_1,\ (2/3)h_1+(1/3)\cos\beta\operatorname{tg}\theta\},$$

где h_1 — безразмерная энергия: $h_1=h/mgd$. На рис. 12 $\psi:=\varphi$.

Задача 43. В поле силы тяжести имеется трубка в форме кольца, вращающаяся с угловой скоростью $\nu=\dot\psi$ вокруг вертикальной оси; в ней скользит точка массы m (см. задачу 31 в § 11). Найти:

а) ОВД $\mathfrak{M}^h$, где h — константа интеграла Якоби;

б) положения равновесия системы и частоты малых колебаний около них.

Неполный ответ: а) $\mathfrak{M}^h=\left\{\cos^2\theta-\frac{2g}{r\nu^2}\cdot h_1-\frac{2g}{\nu}\cos\theta-1\leqslant 0\right\}$,

где $h_1=h/mgr$ — «безразмерная энергия»; б) при $\nu^2\geqslant g/r$ имеются положения равновесия в точках $\Theta_*=\pm\arccos(g/r\nu^2)$ с частотой малых колебаний $\omega=\sqrt{\nu^4-g^2/r^2}/\nu$.