ЦИКЛИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ. О них уже шла речь в динамике точки. Не повторяя всех определений, напомним, что

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \equiv \text{const}$$

(*циклический*, или *кинестенический*, интеграл). В случае классической натуральной системы он линеен по скоростям:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i a_{ji}\dot{q}_i.$$

Теорема, доказанная для движения по поверхности, без труда обобщается: всякий линейный интеграл натуральной системы можно представить как циклический в некоторой системе координат.

ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА. Пусть есть $n-m$ циклических интегралов:

$$J_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{m+s}} = c_s, \; s = 1, \ldots, n-m. \tag{15.3}$$

Лагранжиан не зависит от координат $q_{m+1}, \ldots, q_n$, но зависит, конечно, от скоростей $\dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n$. Наша цель — вообще исключить функции $q_{m+s}(t)$ из рассмотрения.

Теорема Рауса. *Пусть наборы* $q_1(t), \ldots, q_m(t), q_{m+1}(t), \ldots$ $\ldots, q_n(t)$ *— решения системы Лагранжа* (2), *на которых циклические интегралы принимают заранее заданные значения* $c = (c_1, \ldots, c_{n-m})$. *Тогда усеченные наборы* $q_1(t), \ldots, q_m(t)$ *удовлетворяют уравнениям лагранжевой структуры:*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_c}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial R_c}{\partial q_\alpha} = 0, \; \alpha = 1, \ldots, m, \tag{15.4}$$

в которых так называемая функция Рауса

$$R_c = L - \sum_s c_s \dot{q}_{m+s}, \tag{15.5}$$

причем скорости $\dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n$ выражены через $c_1, \ldots, c_{n-m}, \dot{q}_1, \ldots$ $\ldots, \dot{q}_m, q_1, \ldots, q_m, t$ *из системы* (3).

Уравнения (4) составляют так называемую *приведенную систему.*

Доказательство. Полный дифференциал функции Рауса (5)

$$dR_c = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial R_c}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial R_c}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial}{\partial t} R_c dt =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \sum_{s=1}^{n-m} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{s+m}} d\dot{q}_{s+m} -$$