$$-\sum_{s=1}^{n-m} c_s d\dot{q}_{m+s} = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{\alpha=1}^{m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha \right).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial R_c}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial R_c}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

и осталось подставить в уравнения Лагранжа.

Лемма. Дана автономная система с двумя степенями свободы:

$$L = \frac{1}{2}(\alpha \dot{q}_1^2 + 2\gamma \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \beta \dot{q}_2^2) - V.$$

Тогда при наличии циклической координаты q_2 функция Рауса

$$R_c = \frac{1}{2} \frac{\alpha\beta - \gamma^2}{\beta} \dot{q}_1^2 - \left(\frac{c^2}{2\beta} + V \right). \tag{15.6}$$

В самом деле, $J = \gamma \dot{q}_1 + \beta \dot{q}_2 = c$ влечет $\dot{q}_2 = \beta^{-1}(c - \gamma \dot{q}_1)$,

$$R_c = \frac{1}{2}(\alpha \dot{q}_1^2 + 2\gamma \dot{q}_1 \beta^{-1}(c - \gamma \dot{q}_1) + \beta^{-1}(c - \gamma \dot{q}_1)^2) -$$

$$- V - c\beta^{-1}(c - \gamma \dot{q}_1) = \frac{1}{2} \frac{\alpha\beta - \gamma^2}{\beta} \dot{q}_1^2 - \frac{c\gamma}{\beta} \dot{q}_1 - \left(\frac{c^2}{2\beta} + V \right).$$

Слагаемое $c\gamma\beta^{-1}\dot{q}_1$ можно отбросить в силу того, что приведенная система имеет одну степень свободы:

Задача 44. Пусть $n=1$. Тогда, если к $L(\dot{q}, q)$ прибавить $f(q)\,\dot{q}$, то уравнение Лагранжа не изменится. При $n=2$ это в общем случае уже не так. Доказать.

Частный случай (6) мы имели в случае центрального поля сил в плоскости. Функция $V_c = c^2/2\beta + V$ называется приведенным потенциалом системы с лагранжианом L.

Задача 45. Прямая трубка длиной $2l$ лежит концами на горизонтальной окружности и может свободно по ней скользить. В трубке от середины к концу движется точка с относительной скоростью v_0. Масса точки m_2, масса трубки m_1 (рис. 33).

а) Какие есть интегралы согласно лагранжевому формализму и какие общие теоремы динамики системы точек применимы?

б) Пусть при $t=0$, $\dot{\Theta}(0) = \dot{\Theta}_0$, $\Theta(0) = \Theta_0$; требуется найти $\Theta(t)$.

Ответ:

$$\Theta(t) = \Theta_0 + \frac{a}{v_0} \dot{\Theta}_0 \operatorname{arctg} \frac{v_0 t}{a}, \quad a = \sqrt{d^2 + \frac{m_1}{m_2}\left(d^2 + \frac{l^2}{3}\right)}.$$