Задача 46. В поле силы тяжести точка массой m движется по верхней половине конуса $z^2=x^2+y^2$. Найти: а) $\mathfrak{M}^h{}_c$, где h — константа энергии, mc — константа циклического интеграла (здесь φ — угловая циклическая координата в цилиндрических координатах (z, r, φ)); б) частоту малых колебаний в приведенной системе.

Ответ: а) $\mathfrak{M}^h{}_c=\left\{\frac{mc^2}{2r^2}+mgr\leqslant h\right\}$; б) $\omega=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{g^2/c}$.

Задача 47. В поле силы тяжести внутри вращающегося обруча массой m_1, могущего поворачиваться вокруг центра, катается обруч массой m_2. Радиусы обручей — ρ и r (рис. 34).

а) Получить циклический интеграл $(m_1+m_2)\rho\dot\psi-m_2(\rho-r)\dot\Theta$. Пояснить, почему этот интеграл не получается по общим теоремам.

б) Показать, что частота малых колебаний около $\Theta=0$ равна

$$\omega=\sqrt{\frac{m_1+m_2}{2m_1+m_2}\frac{g}{\rho-r}}.$$

Почему она не зависит от постоянной циклического интеграла?

Задача 48. Пусть имеется натуральная система с интегралами (3). Положим $Q_1=(q_1,\dots,q_n)$, $Q_2=(q_{m+1},\dots,q_n)$ и представим L в виде

$$L=\frac{1}{2}\dot Q_1\cdot A_1\dot Q_1+\frac{1}{2}\dot Q_2\cdot A_2\dot Q_2+\dot Q_1\cdot A_{12}\dot Q_2-V,$$

где A_1, A_2, A_{12} — матрицы, зависящие от q, t (здесь Q_1, Q_2 мы считаем векторами-столбцами). Показать, что функция Рауса

$$R_c=\frac{1}{2}\dot Q_1\cdot[A_1-A_{12}A_2^{-1}A^*{}_{12}]\dot Q_1+A_{12}A_2^{-1}c\cdot\dot Q_1-\left[V+\frac{1}{2}c\cdot A_2^{-1}c\right]. \tag{15.7}$$

В ней, вообще говоря, имеются слагаемые, линейные по скоростям $\dot q_i$. Последнее слагаемое называется *приведенным потенциалом.* Можно показать, что матрица $A_1-A_{12}A_2^{-1}A_{12}^*$ положительно определена.

ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДЛЯ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА—ПУАССОНА. Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в поле тяжести (вектор вертикали $\mathbf{f}=\mathbf{e}_z$), предполагая, что моменты инерции $B=C$ и центр масс лежит на оси динамической симметрии $O\mathbf{e}$ на расстоянии l от O. В частности, тело может быть просто осесимметрично.

Пусть θ, ψ — сферические координаты для вектора $\mathbf{e}$ (см. (8.7)); здесь они называются углами нутации и прецессии. Чтобы однозначно определить положение тела, введем еще угол его собственного вращения φ вокруг вектора $O\mathbf{e}$, например угол между плоскостью векторов $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}$ и вектором $\mathbf{e}''$ из главного репера. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ линейно зависит от $\dot\theta$, $\dot\psi$, $\dot\varphi$; следовательно, для вычисления ее достаточно рассмотреть частные движения те-