ла, когда меняется только один из углов θ, φ, ψ, а два другие постоянны: общий результат будет суммой трех частных. В результате легко получаем (рис. 13)

$$\omega = \dot{\psi}\mathbf{f} + \dot{\varphi}\mathbf{e} + \dot{\theta}\frac{[\mathbf{f}\times\mathbf{e}]}{\sin\theta}. \tag{15.8}$$

Учитывая, что

$$\mathbf{f} = \cos\theta\mathbf{e} + \sin\theta(\sin\varphi\mathbf{e}' + \cos\varphi\mathbf{e}''), \tag{15.9}$$

приходим к таким выражениям компонент ω в главном репере:

$$\begin{gathered} p = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}, \\ q = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \\ r = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi. \end{gathered} \tag{15.10}$$

Кинетическая и потенциальная энергия

$$\begin{gathered} 2T = Ap^2 + B(q^2 + r^2) = B\dot{\theta}^2 + (A\cos^2\theta + B\sin^2\theta)\dot{\psi}^2 + \\ + 2A\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta + A\dot{\varphi}^2, \\ V = (\mathbf{f},\ Mgl\mathbf{e}) = Mgl\cos\theta. \end{gathered} \tag{15.11}$$

Видим, что в лагранжиане $L = T - V$ координаты φ, ψ являются игнорируемыми, а соответствующие интегралы суть

$$J_\psi = (A\cos^2\theta + B\sin^2\theta)\dot{\psi} + A\dot{\varphi}\cos\theta = c, \tag{15.12}$$

$$J_\varphi = A\dot{\varphi} + A\dot{\psi}\cos\theta = k. \tag{15.13}$$

Исключить можно сразу обе переменные, но мы начнем с того, что исключим только φ. Получим

$$R_k(\dot{\theta},\ \dot{\psi},\ \theta,\ \psi) = \frac{B}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\psi}^2) + k\dot{\psi}\cos\theta - \left(Mgl\cos\theta + \frac{k^2}{2A}\right).$$

При $k=0$ получаем (с точностью до обозначений) лагранжиан сферического маятника, а при $k\neq 0$ к нему прибавляется линейное по скорости слагаемое (постоянная $k^2/2A$ несущественна).

Изменение θ, ψ со временем описывает самое для нас интересное в движении волчка Лагранжа—Пуассона (особенно если он осесимметричен) — поведение оси $O\mathbf{e}$. Исследуем его качественно.

Вместо того чтобы понижать порядок второй раз, мы просто выпишем интегралы движения:

$$\frac{B}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\psi}^2) + Mgl\cos\theta + \frac{k^2}{2A} = h,$$

$$B\sin^2\theta\dot{\psi} + k\cos\theta = c$$

(последний можно получить и исключением $\dot{\psi}$ из (12), (13)). Отсюда, как и для сферического маятника,

$$\frac{B}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(c - k\cos\theta)^2}{2B\sin^2\theta} + Mgl\cos\theta + \frac{k^2}{2A} = h,$$