Теорема. Система n уравнений второго порядка (1) эквивалентна системе $2n$ уравнений первого порядка:

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

(уравнениями Гамильтона называются уравнения именно такого вида, где H в принципе может быть любой функцией).

Доказательство. Вычисляем полный дифференциал функции H:

$$dH=\frac{\partial H}{\partial t}dt+\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i\right)=\sum_i \dot{q}_i dp_i+\sum_i p_i d\dot{q}_i-$$
$$-\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i-\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt=\sum_i \dot{q}_i dp_i-\sum\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

Отсюда

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\frac{\partial L}{\partial q_i}=-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=-\frac{dp_i}{dt},$$
$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i=\frac{dq_i}{dt},$$

что и требовалось.

Замечание. Гамильтониан (равно как и лагранжиан) часто называют характеристической функцией: это значит, что в выражении $H(p, q, t)$ как бы зашифрованы все индивидуальные черты системы уравнений движения. В частности, выражения лагранжевых скоростей $\dot{q}_i$ через p, q, t совпадают, разумеется, со второй группой уравнений Гамильтона.

Вопрос. Как восстановить лагранжиан, зная гамильтониан?

ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЙ СЕКРЕТ. Из только что сказанного вытекает, что при применении гамильтонова формализма в конкретной задаче главное — выписать функцию H. Для этого гораздо удобнее не универсальная схема, изложенная в начале параграфа, а простые следствия ее, учитывающие специфику реальных лагранжианов. Чаще всего встречаются натуральные системы; поэтому пусть

$$L=\frac{1}{2}\Sigma a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j-V=\frac{1}{2}\dot{q}\cdot A\dot{q}-V, \tag{16.4}$$

где $A=(a_{ij})$ — положительно определенная (и потому невырожденная) симметричная матрица коэффициентов живой силы. Тогда $p=A\dot{q}$, $\dot{q}=A^{-1}p$, и гамильтониан (полная энергия без·кавычек)

$$H=\frac{1}{2}p\cdot A^{-1}p+V. \tag{16.5}$$

Итак, *если кинетическая энергия — квадратичная форма скоростей с матрицей A, то гамильтониан содержит квадратичную форму импульсов с обратной матрицей A^{-1}*. Например: