

а) для точки в плоскости в декартовых координатах (x, y)

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) + V(x, y);$$

б) для точки в центральном поле сил в полярных координатах (r, φ)

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + V(r).$$

ПЕРВЫЙ ПЕРВЫЙ ИНТЕГРАЛ. Впредь считаем, что H не зависит от времени t . Тогда эта функция является первым интегралом соответствующих уравнений Гамильтона:

$$\frac{dH}{dt} = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = \sum \left[\frac{\partial H}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] = 0.$$

СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ — это те и только те точки $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, в которых правые части уравнений Гамильтона, т. е. все частные производные функции $H(p, q)$, обращаются в нуль (критические точки функции H).

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ. Число n называется *числом степеней свободы* гамильтоновой системы порядка $2n$ независимо от природы функции H . Пусть $n=1$. Тогда уровни функции $H(p, q) = h$ на фазовой плоскости состоят из траекторий решений системы уравнений Гамильтона и образуют так называемый фазовый портрет системы. При его графическом изображении принято рисовать положения равновесия и несколько характерных фазовых кривых. В случае натуральной системы

$$L = \frac{1}{2} A(q) \dot{q}^2 - V(q),$$

$$H = \frac{p^2}{2A(q)} + V(q) = h,$$

$$p = \pm \sqrt{2A(q)(h - V(q))}.$$

Таким образом, при заданной энергии h импульс p может принимать в общем случае два значения, отличающихся знаком, пока q принадлежит области возможности движения $\mathfrak{M}^h = \{V(q) \leq h\}$. Иными словами, множество \mathfrak{M}^h есть образ фазовой кривой $H(p, q) = h$ при отображении проектирования $(p, q) \rightarrow q$.

Пример. Круговой маятник (см. § 4): $H = p^2/2 - \cos \varphi$ (для определенности $m=q=l=1$). Фазовый портрет этой задачи (рис. 75) очень прост и вместе с тем нетривиален в том смысле, что содержит характерные черты фазовых портретов вообще. Это

1) *устойчивые* (ср. с § 4) *состояния равновесия* $E_0, E_{2\pi}, \dots$, окруженные замкнутыми фазовыми кривыми; последние в проекции на ось q дают область возможности движения в виде отрезка;

2) *неустойчивые состояния равновесия* $E_{-\pi}, E_\pi, E_{3\pi}, \dots$, представляющие собой особые точки типа «седло»;