3) помимо состояний равновесия, при $h=1$ возможны движения, которые стремятся к этому состоянию при $t\to\infty$ или $t\to-\infty$ (соответствующие участки уровня называются *сепаратрисами*).

Смысл последнего термина в том, что кривые $h=1$ отделяют один качественный тип движения от другого: при $h>1$ импульс сохраняет знак, следовательно, dq/dt в нуль не обращается, и маятник движется все время в одну и ту же сторону; при $-1<h<1$ движение носит колебательный характер.

Уточнение 1. Рассматривая эту задачу как идеализацию реальной системы, мы подразумеваем, что масса m подвешена не на нити, а на невесомом стержне, который не позволит покинуть ей окружность $x^2+y^2=l^2$ (другой вариант — бусинка, насаженная на проволочное кольцо). В задаче о массе, подвешенной на нити, рассмотренной в § 4, учитывалась возможность того, что нитка может ослабнуть. Соответствующие состояния образуют целую область в $\mathbf{R}^2(p, q)$, которая на рис. 75 заштрихована.

Уточнение 2. Строго говоря, многообразие положений в задаче о круговом маятнике является окружностью $\mathbf{S}^1$. Поэтому надо учесть, что точки $(q+2\pi n, p)$ отвечают одному и тому же состоянию (это условно обозначается записью $q \bmod 2\pi$). Чтобы получить взаимно-однозначное соответствие между состояниями маятника и точками фазового портрета, надо отождествить точки плоскости $\mathbf{R}^2(p, q)$, у которых координата q отличается на $2\pi n$. При этом полосы $2\pi n \leqslant q \leqslant 2\pi(n+1)$ как бы наложатся друг на друга, а правая и левая границы у каждой из них склеются (так же, как при изготовлении цилиндра из прямоугольного листа бумаги). В результате получим цилиндр — прямое произведение $\mathbf{S}^1\times\mathbf{R}^1$ окружности $\mathbf{S}^1$ на прямую $\mathbf{R}^1$. Как итог отождествлений он обозначается так: $\mathbf{R}^1\times\mathbf{S}^1=\mathbf{R}^2/2\pi\mathbf{Z}$ (цилиндр есть результат факторизации плоскости $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1$ по группе сдвигов на $2\pi n$ в одном из сомножителей).

Задача 49 (рис. 34). Большой обруч вращается в вертикальной плоскости со скоростью $\dot\psi=\varepsilon t$; θ — угол отклонения центра маленького обруча, катающегося внутри; ρ — радиус большого обруча, r — радиус малого обруча, его масса — m. а) Написать лагранжиан $L(\dot\theta, \theta, t)$, б) выписать уравнения движения, в) подобрать другой лагранжиан $\mathcal{L}(\dot\theta, \theta)$, дающий те же уравнения, г) написать соответствующий гамильтониан, д) нарисовать фазовые портреты при $\varepsilon<\frac{g}{\rho-r}$ и $\varepsilon>\frac{g}{\rho-r}$. Считать, что малый обруч все время прилегает к большому.

Задача 50. Нарисовать фазовый портрет а) приведенной системы сферического маятника (изобразить также зону невозможности движения, если маятник — точка на нити); б) для задачи 43 при $v^2<g/r$ и $v^2>g/r$. Сравнить оба портрета и объяснить различие.

ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ И СКОБКА ПУАССОНА. Пусть $F(p, q)$ — некоторая функция обобщенных координат и импуль-