сов. Тогда в силу уравнений системы с гамильтонианом H

$$\frac{d}{dt}F=\sum\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}+\sum\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}=\sum\left(-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}+\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\right). \quad (16.6)$$

Определение. Если F и G — две функции переменных p и q, то их скобкой Пуассона называется функция

$$(F, G)=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}+\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right). \quad (16.7)$$

Из (6) видим, что F есть первый интеграл системы с гамильтонианом H тогда и только тогда, когда

$$(F, H)\equiv 0. \quad (16.8)$$

Говорят при этом, что функции F и H находятся в инволюции.

АЛГЕБРЫ ФУНКЦИЙ. Из определения (7) вытекают следующие свойства скобок Пуассона:

(П 1) кососимметричность $(F, G)=-(G, F)$;

(П 2) линейность $(F, \alpha G+\beta H)=\alpha(F, G)+\beta(F, H)$;

(П 3) тождество Пуассона (Якоби):

$$((F, G), H)+((H, F), G)+((G, H), F)=0.$$

Первые два свойства тривиальны. Третье доказывается прямой, но длинной выкладкой; позднее будет указан короткий вывод. Перечисленные свойства означают, что бесконечно дифференцируемые функции переменных p, q образуют алгебру Ли.

Теорема Пуассона. *Если F, G — первые интегралы системы с гамильтонианом H, то (F, G) — тоже первый интеграл.*

Доказательство. Перепишем тождество Пуассона, используя свойство кососимметричности, и учтем (8):

$$((F, G), H)=((F, H), G)-((G, H), F)=(0, G)+(0, F)\equiv 0.$$

Этот факт важен в идейном отношении (первые интегралы гамильтоновой системы образуют подалгебру в алгебре всех функций), но практически бесполезен: полученный таким образом интеграл всегда выражается через уже известные.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОБОК ПУАССОНА. Для этого используются, помимо уже отмеченных, дальнейшие свойства скобок Пуассона:

(П 4) $(F, G_1\cdot G_2)=G_1(F, G_2)+G_2(F, G_1)$ (правило Лейбница);

(П5) $(\varphi(F_1, \dots, F_k), G)=\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{\partial\varphi}{\partial F_i}(F_i, G)$ (правило сложной функции);

(П 6) $G_i(p, q)=G_i(p_i, q_i)\Rightarrow(G_i, G_j)\equiv 0$ (правило разных пар);

(П 7) $(q_i, p_i)=1$, $(p_i, q_i)=-1$ (ненулевые координатные скобки).