Докажем (П 5):

$$(\varphi(F_1, \dots, F_k), G) = \sum_i \left(-\frac{\partial\varphi(F_1, \dots, F_k)}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial\varphi(F_1, \dots, F_k)}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right) =$$

$$= \sum_i \left(-\left(\sum_\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial F_\alpha}\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\right)\frac{\partial G}{\partial q_i} + \left(\sum_\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial F_\alpha}\frac{\partial F_\alpha}{\partial q_i}\right)\frac{\partial G}{\partial p_i}\right) =$$

$$= \sum_\alpha \frac{\partial\varphi}{\partial F_\alpha}\sum_i \left(-\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right).$$

Вопрос. Как вывести свойства (П 1), (П 2), (П 4) не из выражения скобок Пуассона, а из свойства (П 5)?
Более сложный вопрос: как вывести (П 5) из (П 1), (П 2), (П 4)?

Задача 51 (иллюстрация к теореме Пуассона и комментарию к ней). Рассмотрим движение точки массы m в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3(x, y, z)$ в поле с потенциалом $V(x, y, z)$. Тогда

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z).$$

Требуется выразить компоненты кинетического момента Λ_x, Λ_y, Λ_z через переменные p_x, p_y, p_z, x, y, z и показать, что

а) если $V = V(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$, то

$$(\Lambda_x, H) = (\Lambda_y, H) = (\Lambda_z, H) = 0,$$

т. е. Λ_x, Λ_y, Λ_z являются первыми интегралами;

б) попарные скобки Пуассона этих функций суть

$$(\Lambda_x, \Lambda_y) = +\Lambda_z, \dots; \qquad (16.9)$$

в) функции Λ_z и $\Lambda^2 = \Lambda_x^2 + \Lambda_y^2 + \Lambda_z^2$ находятся в инволюции.

СТРУКТУРА ГАМИЛЬТОНИАНА И ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. Здесь приводятся самые простые наблюдения.

1. Если $\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$, то q_i — первый интеграл; если $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$, то p_i — первый интеграл (естественно, он называется циклическим).

2. *Отделение переменных.* Если гамильтониан есть функция от некоторой функции $f(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m)$ и от $p_{m+1}, \dots, p_n$, $q_{m+1}, \dots, q_n$, то f — первый интеграл.

Действительно, пусть $H = \Phi(f, p_{m+1}, \dots, p_n, q_{m+1}, \dots, q_n)$. Тогда

$$(f, H) = \sum_1^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) =$$

$$= \sum_1^m \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial \Phi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial \Phi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_i}\right) = 0.$$

3. *Полное разделение переменных:*

$$H = \Sigma H_i(q_i p_i).$$