Тогда H_i — первые интегралы, попарно находящиеся в инволюции. Более того, система уравнений Гамильтона распадается на n независимых систем:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_i}{\partial q_i};\quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_i}{\partial p_i}.$$

Если кривые $H_i(q_i, p_i) = c_i$ на соответствующей плоскости $\mathbf{R}^2(p_i, q_i)$ все замкнуты, то в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, \ldots q_n)$ совместный уровень $I_{c_1 \ldots c_n} = \{H_1 = c_1, \ldots, H_n = c_n\}$ получается n-мерным тором. В самом деле, $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}_1^2 \times \ldots \times \mathbf{R}_n^2$ и в каждом сомножителе высекается $\mathbf{S}^1$; в результате

$$I_{c_1 \ldots c_n} \simeq \mathbf{S}^1 \times \ldots \times \mathbf{S}^1 = \mathbf{T}^n.$$

4. *Сложное разделение переменных:*

$$H = \frac{\Sigma F_i(q_i, p_i)}{\Sigma f_i(q_i, p_i)}.$$

Тогда $G_i = F_i - Hf_i$ — первые интегралы в инволюции.

Задача 52. Проверить это.

В сумме функции G_i дают тождественный нуль, так что среди них только не более $(n-1)$ независимых; вместе с H получается ровно n. В частности, в случае лиувиллевых систем

$$H = [\Sigma f_i(q_i)]^{-1} \left[\sum \left(\frac{p_i^2}{2} + V_i(q_i)\right)\right],$$

т. е. имеет место вариант сложного разделения переменных. Как и в случае полного разделения, в фазовом пространстве легко могут получаться n-мерные торы, если на плоскостях $\mathbf{R}^2(p_i, q_i)$ получаются «окружности» $\{G_i = F_i - hf_i = c_i\}$. На эту ситуацию еще предстоит посмотреть с более общей точки зрения.

Задача 53. Рассмотрим плоскую задачу Кеплера $(m=1)$:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{\mu}{r},$$

а) Каков смысл циклического интеграла $G = p_\varphi$?

б) Допускает ли гамильтониан H отделение переменных? Полное разделение переменных? Сложное разделение переменных?

Известно, что наряду с интегралами энергии и момента в задаче Кеплера есть векторный первый интеграл — вектор Лапласа $\mathbf{\Phi} = \Phi_x \mathbf{e}_x + \Phi_y \mathbf{e}_y$ (см. § 3). Требуется

в) выразить Φ_x, Φ_y через r, φ, p_r, p_φ;

г) показать, что

$$(\Phi_x, G) = -\Phi_y,\ (\Phi_y, G) = \Phi_x,\ (\Phi_x, \Phi_y) = 2GH$$

(еще одна иллюстрация теоремы Пуассона и комментария к ней).