§ 17. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА И ЛИНЕЙНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

Симплектической единицей называется матрица размером $2n \times 2n$:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix},$$

где E_n — единичная матрица $n \times n$. Легко проверить, что $I^2 = -E_{2n}$, откуда $I^{-1} = -I = I^*$.

В пространстве $\mathbf{R}^{2n}(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{2n})$ введем *кососкалярное произведение* по формуле

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x} \cdot I\mathbf{y}, \tag{17.1}$$

где $\cdot$ формальное (покомпонентное) скалярное произведение. В координатной записи

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \sum_i (-x_i y_{n+i} + y_i x_{n+i}) = (x_1, \ldots, x_{2n})\, I \begin{pmatrix} y_1 \\ y_{2n} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{2n}),\ \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{2n}),$$

Свойства кососкалярного произведения:

(α) кососимметричность: $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = -[\mathbf{y}, \mathbf{x}]$;

(β) билинейность: $[\mathbf{z}, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}] = \alpha[\mathbf{z}, \mathbf{x}] + \beta[\mathbf{z}, \mathbf{y}]$;

(γ) невырожденность: $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \equiv 0 \forall \mathbf{x} \Longleftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

Лемма 0 (следствие невырожденности). Если $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{2n})$ — базис $\mathbf{R}^{2n}$, то матрица $\|[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j]\|$ имеет ненулевой определитель.

Доказательство. Пусть ее строки (или столбцы) линейно зависимы, т. е. $\sum\limits_i \lambda_i [\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j] = 0$, или $\left[\sum\limits_i \lambda_i \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j\right] = 0$ в силу линейности кососкалярного произведения. Поскольку $\mathbf{f}_i$ составляют базис, по свойству (γ) имеем $\Sigma\lambda_i \mathbf{f}_i = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_i = 0$ для всех i.

Определение. Базис $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{2n}$ называется *симплектическим (каноническим)*, если $\|[\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j]\| = I$.

Такие базисы существуют; в частности, базис $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ — симплектический.

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. Линейное отображение $\mathbf{z} \mapsto \zeta = S\mathbf{z}$ называется *каноническим (симплектическим)*, если оно сохраняет кососкалярное произведение, т. е.

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = [\xi, \eta] = [S\mathbf{x}, S\mathbf{y}]. \tag{17.2}$$

Матрица S называется в этом случае *симплектической*. Ясно, что она непременно невырождена.

Теорема. *Матрица S является симплектической тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий:*

(A) симплектический базис переходит в симплектический;