(Б) $S^*IS=I$;
(В) $SIS^*=I$;
(Г) $S^{-1}=-IS^*I$;
(Д) $S^*=-IS^{-1}I$.

Пусть

$$S=\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix},$$

где A, B, C, D — матрицы n-го порядка. Должно быть
(Е) $A^*B-B^*A=0$, $C^*D-D^*C=0$, $AD-B^*C=E$;
(Ж) $AC^*-CA^*=0$, $BD^*-DB^*=0$, $AD^*-CB^*=E$;
З) $S^{-1}=\begin{pmatrix} D^* & -C^* \\ -B^* & A^* \end{pmatrix}$.

Доказательство. Выпишем тождество (2) подробно:

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \boldsymbol{\xi} \cdot I\boldsymbol{\eta} = S\mathbf{x} \cdot IS\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot S^*IS\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot I\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

Из последней строчки следует (Б). Умножая это равенство на S^{-1} справа и $I^{-1}=-I$ слева, получаем (Г), из которого умножением справа на S и слева на $I^{-1}=-I$ получается (В). Для доказательства (Е) вычислим

$$S^*IS=\begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -E \\ +E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -B & -D \\ A & C \end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} B^*A-A^*B & -A^*D+B^*C \\ D^*A-C^*B & D^*C-C^*D \end{pmatrix}.$$

В силу (Б) получаем условия на матрицы A, B, C, D:

$$A^*B-B^*A=0,$$
$$C^*D-D^*C=0,$$
$$A^*D-B^*C=E,$$
$$C^*B-D^*A=-E.$$

Последние два условия равносильны (первые два условия означают, что матрицы A^*B и C^*D — симметрические).

Пример. Пусть $n=1$. Тогда симплектическим пространством будет плоскость $\mathbf{R}^2(z_1z_2)$. Пусть каноническое отображение задается матрицей

$$S=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Выполнение первых двух условий критерия (Е) очевидно: $ab-ba=cd-dc=0$. Последнее условие: $ad-bc=1$ означает, что $\det S=1$. Этому удовлетворяют, в частности,

а) собственные ортогональные матрицы (матрицы поворотов);
б) матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda\neq 0,$$