которые задают гиперболические повороты:

$$\zeta_1 = \lambda z_1, \ \zeta_2 = \frac{1}{\lambda} z_2.$$

Очевидно, что $\zeta_1\zeta_2 = z_1 z_2$, так что векторы-образы с изменением λ как будто скользят по гиперболе (при обычном повороте сохраняются окружности, при гиперболическом — гиперболы).

ЛИНЕЙНЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ. Пусть имеются уравнения Гамильтона:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Положим $z_i = p_i$, $z_{n+i} = q_i$; нашу систему можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \frac{dp_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dp_n}{dt} \\ \frac{dq_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dq_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial p_n} \\ \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_n} \end{pmatrix}.$$

Слева у нас стоит вектор $\frac{d\mathbf{z}}{dt}$, справа симплектическая единица умножается на вектор $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} = \left(\frac{\partial H}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial z_{2n}}\right)$. Итак,

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = I \frac{\partial H}{\partial \mathbf{z}} - \tag{17.3}$$

другое представление системы Гамильтона. Она линейна тогда и только тогда, когда (с точностью до константы) H — квадратичная форма своих аргументов, т. е. $H = \frac{1}{2} \mathbf{z} \cdot \mathbf{H}\mathbf{z}$, где $\mathbf{H}$ — симметрическая матрица. В таком случае система (3) примет вид

$$\dot{\mathbf{z}} = I\mathbf{H}\mathbf{z}. \tag{17.4}$$

Поскольку $I\mathbf{H}$ — постоянная матрица, общее решение здесь

$$\mathbf{z} = e^{I\mathbf{H}t}\mathbf{z}_0. \tag{17.5}$$

Матричный ряд

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$$