абсолютно сходится. Нетрудно показать, что

1) $(e^A)^* = e^{A^*}$;

2) $e^{A+B} = e^A e^B$, если $AB = BA$;

3) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$;

4) $(e^{A(t)}) = \dot{A}(t)\, e^{A(t)}$, если $\dot{A}A = A\dot{A}$.

Определение. Назовем *фазовым потоком* $g_H{}^t$ группу сдвигов за время t вдоль решений системы (4):

$$\mathbf{z}_0 \to g^t{}_H \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(\mathbf{z}_0, t) = e^{I\mathbf{H}t}\mathbf{z}_0.$$

Задача 54. Пусть $n=1$ и $H = \frac{1}{2}(\alpha p^2 + \beta q^2)$, $\alpha > 0$. Тогда

а) при $\beta > 0$ (эллиптический тип фазового потока)

$$e^{I\mathbf{H}t} = \begin{pmatrix} \cos \nu t & -\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin \nu t \\ +\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sin \nu t & \cos \nu t \end{pmatrix}, \quad \nu = \sqrt{\alpha\beta};$$

б) при $\beta = 0$ (промежуточный вырожденный случай)

$$e^{IHt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha t & 0 \end{pmatrix};$$

в) при $\beta < 0$ (гиперболический тип)

$$e^{IHt} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \nu t & \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \operatorname{sh} \nu t \\ \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \operatorname{sh} \nu t & \operatorname{ch} \nu t \end{pmatrix}, \quad \nu = \sqrt{-\alpha\beta}.$$

Доказать. Изобразить фазовый портрет во всех случаях.

Лемма 1. Матрица $e^{I\mathbf{H}t}$ — симплектическая, т. е. фазовый поток состоит из канонических (симплектических) отображений.

Докажем, что если $\mathbf{H}$ — симметрическая, то $e^{I\mathbf{H}}$ — каноническая (обратное неверно, т. е. не каждая каноническая матрица так представима):

$$S^* = (e^{IH})^* = e^{H^* I^*} = e^{-HI} = \sum \frac{1}{n!}(-1)^n (HI)^n.$$

Но

$$(HI)^n = HIHI \ldots HI = I^{-1}(IHIH \ldots IH)I = I^{-1}(IH)^n I.$$

Следовательно,

$$\sum \frac{1}{n!}(-1)^n (\mathbf{H}I)^n = I^{-1} \sum \frac{1}{n!}(-I\mathbf{H})^n I = I^{-1} e^{-I\mathbf{H}} I.$$

Таким образом, $S^* = I^{-1} S^{-1} I$, что и требовалось доказать.