Лемма 2. Пусть λ_i — собственные числа матрицы $I\mathbf{H}$, а $\mathbf{f}_i$ — ее собственные векторы (вообще говоря, комплексные). Тогда либо $\diagdown \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \diagdown = 0$, либо $\lambda_i + \lambda_j = 0$.

Доказательство исходит из симметричности матрицы $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{H} f_j - \mathbf{H}\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 0.$$

Первое слагаемое

$$f_i \cdot \mathbf{H} f_j = -f_i \cdot I^2 \mathbf{H}\mathbf{f}_j = \diagdown I\mathbf{H}\mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i \diagdown = \lambda_j \diagdown \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i \diagdown$$

и аналогично второе:

$$-\mathbf{H}\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = \lambda_i \diagdown \mathbf{f}_j, \mathbf{f}_i \diagdown.$$

В итоге $(\lambda_i + \lambda_j) \diagdown \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \diagdown = 0$.

Лемма 3 (о распределении собственных чисел). Если λ — собственное, то

(а) общий факт: и $\bar{\lambda}$ — собственное;

(б) специфический факт: $-\lambda$ — тоже собственное.

Второе следует из цепочки равенств:

$$0 = \det(I\mathbf{H} - \lambda E) = \det(I\mathbf{H} - \lambda E)^* = \det(-\mathbf{H}I - \lambda E) =$$
$$= \det[I(I\mathbf{H} + \lambda E)I] = (\det I)^2 \det(I\mathbf{H} + \lambda E) = \det(I\mathbf{H} + \lambda E).$$

Таким образом, расположение ненулевых собственных чисел на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ характеризуется разбиением их на пары (в случае чисто мнимых и действительных) и четверки (рис. 70). Всюду ниже будем считать, что все собственные числа матрицы различны, следовательно, ни одно не равно нулю.

ПРИМЕНЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. Пусть $\dot{\mathbf{z}} = I\mathbf{H}\mathbf{z}$, и есть каноническое отображение $\zeta = S\mathbf{z}$, тогда

$$\frac{d\zeta}{dt} = S\frac{d\mathbf{z}}{dt} = SI\mathbf{H}\mathbf{z} = SI\mathbf{H}S^{-1}\zeta = SIS^*(S^*)^{-1}\mathbf{H}S^{-1}\zeta =$$
$$= I(S^{-1})^*\mathbf{H}S^{-1}\zeta = I\mathbf{H}'\zeta$$

(причем $\mathbf{H}' = (S^{-1})^*\mathbf{H}S^{-1}$ — симметрическая матрица): преобразованная система снова линейная каноническая. Ее гамильтониан

$$H'(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta \cdot H'\zeta = \frac{1}{2}\zeta \cdot (S^{-1})^*\mathbf{H}S^{-1}\zeta = \frac{1}{2}S^{-1}\zeta \cdot HS^{-1}\zeta =$$
$$= \frac{1}{2}\mathbf{z} \cdot H\mathbf{z} = H(S^{-1}\zeta).$$

Канонические преобразования призваны упрощать системы.

Задача 55. Пусть $n = 1$ и $H = \frac{1}{2}(\alpha p^2 + 2\gamma pq + \beta q^2) \not\equiv 0$. Показать, что существует симплектическое преобразование

$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},$$

такое, что $H' = \pm\frac{1}{2}(P^2 + \mu Q^2)$ (вспомним примеры симплектических матриц при $n = 1$). Чему равно μ? В каком смысле мож-