но сказать, что существуют два варианта эллиптического типа фазового потока и только один вариант гиперболического типа?

Теорема о полном разделении. *Если собственные значения матрицы* $I\mathbf{H}$ *различные чисто мнимые или действительные числа, то существует каноническое преобразование* $\zeta=S\mathbf{z}$ *такое, что*

$$H'=\sum_{i=1}^{n}\pm\frac{1}{2}(P^2{}_i+\mu_i Q^2{}_i),$$

*т. е. переменные полностью разделяются.* Здесь $\zeta=(P_1,\ldots,P_n,Q_1,\ldots,Q_n)$.

Доказательство проводится в три этапа.

1. Следствие леммы 2. Можно так занумеровать числа $\lambda_i$ и выбрать векторы $\mathbf{f}_i$, чтобы выполнялось следующее:

а) для $\alpha=1,\ldots,m$ — числа $\lambda_\alpha$, $\lambda_{n+\alpha}=-\lambda_\alpha$ — действительные, а для $\rho=m+1,\ldots,n$ числа $\lambda_\rho$, $\lambda_{n+\rho}=\overline{\lambda}_\rho$ — чисто мнимые;

б) симплектическим является базис:

$$\{\tilde{\mathbf{f}}_i\}=\{\tilde{\mathbf{f}}_\alpha=\mathbf{f}_\alpha,\ \tilde{\mathbf{f}}_\rho=\operatorname{Re}\mathbf{f}_\rho,\ \tilde{\mathbf{f}}_{n+\alpha}=\mathbf{f}_{n+\alpha},\ \tilde{\mathbf{f}}_{n+\rho}=\operatorname{Im}\mathbf{f}_\rho\}\qquad(17.6)$$

(как известно,

$$\lambda_\rho\longleftrightarrow\mathbf{f}_\rho=\tilde{\mathbf{f}}_\rho+i\tilde{\mathbf{f}}_{n+\rho},\quad \lambda_{n+\rho}=\tilde{\lambda}_\rho\longleftrightarrow\mathbf{f}_{n+\rho}=\tilde{\mathbf{f}}_\rho-i\tilde{\mathbf{f}}_{n+\rho},$$

т. е. сопряженным собственным числам отвечают сопряженные собственные векторы). Положим $\lambda_\rho=-i\lambda'_\rho$, $\lambda_{n+\rho}=i\lambda'_\rho$, $\lambda_{n+\alpha}=\lambda'_\alpha$.

2. Предложение. Пусть $S$ — отображение, переводящее $\mathbf{e}_i$ в $\tilde{\mathbf{f}}_i$. Тогда в новых переменных $w=(r_1,\ldots,r_n,s_1,\ldots,s_n)$

$$\tilde{H}=\sum_{\alpha}\lambda'_\alpha r_\alpha s_\alpha+\sum_{\rho}\frac{1}{2}\lambda'_\rho(r^2_\rho+s^2_\rho).$$

3. Замечание. От $\tilde{H}$ можно перейти к $H'$, указанному в формулировке теоремы. По каждой паре переменных надо действовать независимо. Если есть две переменные $r$, $s$, то

$$\tilde{H}=\lambda rs\to H''=\frac{\lambda}{2}(\overline{r}^2-\overline{s}^2)\to H'=\frac{1}{2}(P^2+\mu Q^2),\ \mu<0,$$

$$\tilde{H}=\frac{\lambda}{2}(r^2+s^2)\to H'=\pm\frac{1}{2}(P^2+\mu Q^2),\quad \mu>0,$$

при соответствующем линейном каноническом преобразовании (см. примеры линейных канонических отображений при $n=1$).

Доказательство следствия. Занумеруем $\lambda_i$ так, чтобы

$$\lambda_\alpha=-\lambda_{n+\alpha},\quad \alpha=1,\ldots,m,\quad\text{и }\lambda_\rho=\overline{\lambda}_{n+\rho},\quad \rho=m+1,\ldots,n,$$

где $\lambda_\alpha$ чисто действительны, $\lambda_\rho$ чисто мнимы. Так как все $\lambda_i$ различны, существует собственный базис $\mathbf{f}$. Перейдем к вещественному базису $\tilde{\mathbf{f}}$ по формуле (6) и сведем все векторы в пары вида $\pi_i=\{\tilde{\mathbf{f}}_i,\tilde{\mathbf{f}}_{n+i}\}$.