А. Покажем, что векторы из разных пар π_i и π_j $(i\neq j)$ попарно кособртогональны. Рассмотрим, например, случай $i=\alpha$, $j=\rho$. Так как λ_α вещественны, а λ_ρ мнимы, то

$$\lambda_\alpha+\lambda_\rho\neq 0,\ \lambda_\alpha+\lambda_{n+\rho}\neq 0,\ \lambda_{n+\alpha}+\lambda_\rho\neq 0,\ \lambda_{n+\alpha}+\lambda_{n+\rho}\neq 0.$$

Отсюда по лемме 3

$$\diagdown \mathbf{f}_{n+\alpha},\ \tilde{\mathbf{f}}_\rho\pm i\tilde{\mathbf{f}}_{n+\rho}\diagdown=\diagdown\tilde{\mathbf{f}}_\alpha,\ \tilde{\mathbf{f}}_\alpha\pm i\tilde{\mathbf{f}}_{n+\rho}\diagdown=0,$$

или, отделяя действительные и мнимые части,

$$\diagdown\tilde{\mathbf{f}}_\alpha,\ \tilde{\mathbf{f}}_\rho\diagdown=\diagdown\tilde{\mathbf{f}}_\alpha,\ \tilde{\mathbf{f}}_{n+\rho}\diagdown=\diagdown\tilde{\mathbf{f}}_{n+\alpha},\ \tilde{\mathbf{f}}_\rho\diagdown=\diagdown\tilde{\mathbf{f}}_{n+\alpha},\ \tilde{\mathbf{f}}_{n+\rho}\diagdown=0.$$

Упражнение. Остальные случаи разобрать самостоятельно.

Б. Итак, в репере $\{\tilde{\mathbf{f}}_i\}$ все $\diagdown\tilde{\mathbf{f}}_i,\ \tilde{\mathbf{f}}_k\diagdown=0$ за исключением $\diagdown\tilde{\mathbf{f}}_k,\ \tilde{\mathbf{f}}_{n+k}\diagdown=-\diagdown\tilde{\mathbf{f}}_{n+k},\ \tilde{\mathbf{f}}_k\diagdown=c_k\neq 0$ (если бы хоть одно из $c_k=0$, то матрица попарных кососкалярных произведений векторов базиса была бы вырождена, что противоречит лемме 0).

Осталось сделать $c_k\equiv 1$. Во-первых, можно считать $c_i>0$, поменяв, если надо, местами λ_k и λ_{n+k} (если $k=\alpha$, то поменяются местами $\tilde{\mathbf{f}}_\alpha$ и $\tilde{\mathbf{f}}_{n+\alpha}$, если $k=\rho$, то $\tilde{\mathbf{f}}_k$ не изменит направление, $\tilde{\mathbf{f}}_{n+\rho}$ изменит). Теперь, если $c_k\neq 1$, то возьмем вместо $\mathbf{f}_k$ и $\mathbf{f}_{n+k}$ векторы $\frac{1}{\sqrt{c_k}}f_k$ $\frac{1}{\sqrt{c_k}}f_{n+k}$.

Доказательство предложения. Пусть λ_k — собственные числа линейной системы $\dot{\mathbf{z}}=C\mathbf{z}$ (каноничность пока не используется) и вектор $\mathbf{z}$ разложен по собственному реперу $\mathbf{z}=\Sigma z_i\mathbf{f}_i$, тогда

а) система приобретает вид $\dot{z}_k=\lambda_k z_k$;

б) если $\lambda_j=\bar{\lambda}_k$, то $z_j=\bar{z}_k$; если λ_k — действительное число, то и z_k — действительная координата.

Применим эти общие сведения к каноническим системам. Для пары собственных значений λ_α, $\lambda_{n+\alpha}=-\lambda_\alpha$ имеем

$$\frac{dz_\alpha}{dt}=\lambda_\alpha z_\alpha,\quad \frac{dz_{n+\alpha}}{dt}=\lambda_{n+\alpha}z_{n+\alpha},$$

или, обозначив $z_\alpha=r_\alpha$, $z_{n+\alpha}=s_\alpha$ и учитывая $\lambda_{n+\alpha}=-\lambda_\alpha$, приходим к

$$\frac{dr_\alpha}{dt}=-\lambda_{n+\alpha}r_\alpha=-\frac{\partial}{\partial s_\alpha}(\lambda_{n+\alpha}r_\alpha s_\alpha),$$

$$\frac{ds_\alpha}{dt}=\lambda_{n+\alpha}s_\alpha=\frac{\partial}{\partial r_\alpha}(\lambda_{n+\alpha}r_\alpha s_\alpha).$$

Для пары собственных значений $\lambda_\rho=-i\lambda'_\rho$, $\lambda_{n+\rho}=i\lambda'_\rho$ обозначим

$$z_\rho=\frac{1}{2}(r_\rho-is_\rho),\quad z_{n+\rho}=\frac{1}{2}(r_\rho+is_\rho),$$

тогда

$$\frac{dz_\rho}{dt}=\lambda_\rho z_\rho\Longleftrightarrow\frac{d}{dt}(r_\rho-is_\rho)=-i\lambda'_\rho(r_\rho-is_\rho),$$