а после отделения действительной и мнимой частей

$$\frac{dr_\rho}{dt}=-\lambda'_\rho s_\rho=-\frac{\partial}{\partial s_\rho}\left(\frac{\lambda'_\rho}{2}(r^2_\rho+s^2_\rho)\right),$$

$$\frac{ds_\rho}{dt}=\lambda'_\rho r_\rho=\frac{\partial}{\partial r_\rho}\left(\frac{\lambda'_\rho}{2}(r^2_\rho+s^2_\rho)\right).$$

Итак, в переменных r_k, s_k уравнения Гамильтона разделяются на независимые системы. Суммарный гамильтониан и есть искомый.

Задача 56. Доказать, что каноническая система $\dot{\mathbf{z}}=I\mathbf{H}\mathbf{z}$

а) имеет вполне-линейный интеграл $F=\mathbf{z}\cdot I\mathbf{u}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{H}\mathbf{u}=0$, так что существует $\lambda=0$;

б) имеет вполне-квадратичный интеграл $G=\frac{1}{2}\mathbf{z}\cdot\mathbf{G}\mathbf{z}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{G}I\mathbf{H}=\mathbf{H}I\mathbf{G}$ (т. е. $\mathbf{G}I\mathbf{H}=-(\mathbf{G}I\mathbf{H})^*$);

в) фазовые потоки систем $\dot{\mathbf{z}}=I\mathbf{H}\mathbf{z}$, $\dot{\mathbf{z}}'=I\mathbf{G}\mathbf{z}$ коммутируют, т. е. (рис. 71) $\mathbf{z}_H(t, \mathbf{z}_G(s, \mathbf{z}_0))=\mathbf{z}_G(s, \mathbf{z}_H(t, \mathbf{z}_0))$;

г) при полном разделении переменных квадратичный интеграл приводится к виду

$$G=\sum\frac{\delta_i}{2}(P^2_i+\mu Q^2_i).$$

§ 18. КАНОНИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Напомним некоторые сведения из курса дифференциальной геометрии. Пусть $\mathfrak{M}$ — гладкое многообразие с локальными координатами $z_1, \ldots, z_k$ (его можно представить себе в виде поверхности в пространстве). Если в § 3 мы записывали касательный вектор в виде $\mathbf{v}=\Sigma v_i\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}$, то теперь будем писать более условно:

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{k}v_i\frac{\partial}{\partial z_i}. \tag{18.1}$$

Смысл такой записи в том, что задание отдельного вектора или векторного поля равносильно заданию дифференцирования гладких функций $f(z_1, \ldots, z_k)$ вдоль этого вектора или поля. А именно,

$$\mathbf{v}(f)=\sum_i v_i\frac{\partial f}{\partial z_i} \tag{18.2}$$

есть производная функции f вдоль (1). Каждому векторному полю $\mathbf{v}(z)$ отвечает его фазовый поток $g^t_{\mathbf{v}}$: по определению $g^t_{\mathbf{v}}(z)$ есть решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i}{dt}=v_i(z_1, \ldots, z_k)$$

с начальным условием $g^0_{\mathbf{v}}(z)=z$. Фазовый поток обладает груп-